



TECNICHE DI ANALISI DEI DATI

AA 2020/2021

PROF. V.P. SENESE

Questi materiali sono disponibili per tutti gli studenti al seguente indirizzo:

http://psiclab.altervista.org/TecnAnDat2021/2020_2021.html

Università della Campania «Luigi Vanvitelli» – Dipartimento di Psicologia – TECNICHE DI ANALISI DEI DATI – © Prof. V.P. Senese

MODELLI LINEARI

LA REGRESSIONE

LA REGRESSIONE **SEMPLICE** (E **MULTIPLA**)

L'ANALISI DELLA VARIANZA

DISEGNI **UNIVARIATI** (DISEGNI **FATTORIALI** SEMPLICI E MISTI)

MODELLI LINEARI

Quando in una ricerca è possibile distinguere (in base alla teoria) tra **variabili indipendenti** e **variabili dipendenti** il ricercatore può essere interessato a verificare la presenza della **relazione causale** supposta (tra le variabili) nei dati raccolti (osservazioni campionarie).

Prima di iniziare un qualsiasi discorso sulle relazioni di causalità tra variabili dobbiamo ribadire la distinzione tra **covarianza** e **causazione**.

MODELLI LINEARI

COVARIANZA

(Covarianza, Correlazione o Associazione):

quando “semplicemente” osserviamo che due variabili presentano variazioni concomitanti.

CAUSAZIONE:

quando pensiamo che siano proprio le variazioni della variabile X a determinare le variazioni della variabile Y. Identifichiamo la DIREZIONALITÀ e l'esistenza del LEGAME DIRETTO tra le due variabili.

Mentre la covarianza è osservabile la causazione appartiene al dominio della teoria!!!

REGRESSIONE LINEARE

Quando la relazione si riferisce a due variabili di tipo **quantitativo** (I o R) l'analisi che può essere impiegata è l'analisi della **regressione lineare**.

In questo caso l'obiettivo è quello di voler verificare se la capacità di prevedere i valori di una data variabile **Y**, **E(Y)**, aumenta conoscendo i valori assunti da una data variabile **X**.

REGRESSIONE LINEARE

PREVISIONE DEI PUNTEGGI

Sappiamo che quando non conosciamo il punteggio Y_i di un soggetto, la migliore previsione che possiamo fare è usare come valore di riferimento il punteggio medio in Y :

$$Y_i = \mu_Y + \varepsilon$$

$$Y_i = E(Y) + \varepsilon$$

Ipotesi:

Questo modello assume che tutti le osservazioni vengono dalla stessa popolazione e che le differenze osservate sono dovute solo all'errore.

REGRESSIONE LINEARE

Se supponiamo che il punteggio Y_i **dipende dal punteggio** X_i del soggetto, possiamo provare a prevedere il valore di Y in base alla seguente formula:

$$E(Y_i) = \mu_Y + \beta X_i + \varepsilon_i$$

In pratica, ipotizziamo che (mantenendo la componente stocastica) se la teoria è vera, allora il valore atteso di Y è funzione **lineare** di X .

REGRESSIONE LINEARE

L'analisi di regressione (lineare) è una tecnica di analisi dei dati che esamina la relazione tra una (o più) variabili esplicative (VI o *predittori*) e una variabile criterio (o VD). Lo studio della relazione può avere un duplice scopo:

- **ESPLICATIVO**

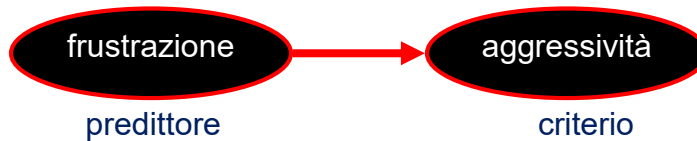
es. sottoporre a verifica un modello teorico

- **PREDITTIVO**

es. individuare la combinazione lineare di variabili che consentono di stimare in modo ottimale la VD

REGRESSIONE LINEARE

La regressione lineare si dice **semplice** quando abbiamo una sola **VD** (o criterio) e una sola **VI** (o predittore). L'ipotesi che viene formulata riguarda l'influenza della VI sulla VD.

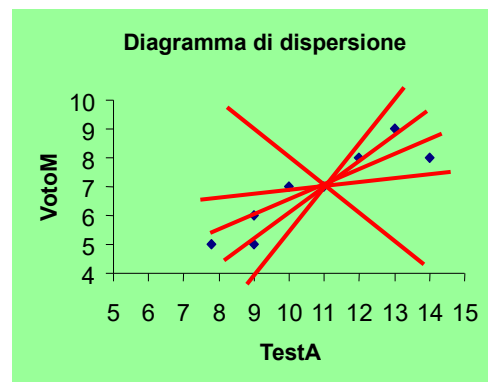


$$\hat{Y} = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

criterio coefficiente errore
 costante predittore

REGRESSIONE LINEARE

Da un punto di vista grafico viene individuata quella **retta** che, data la relazione tra le variabili, consente di **prevedere al meglio** i punteggi nella variabile dipendente a partire da quelli nella variabile indipendente.

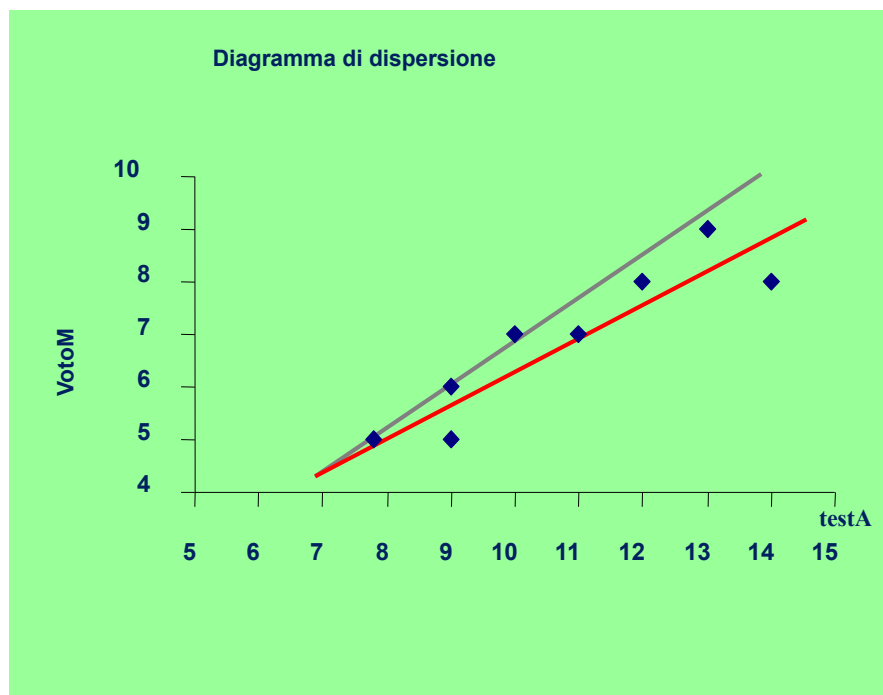


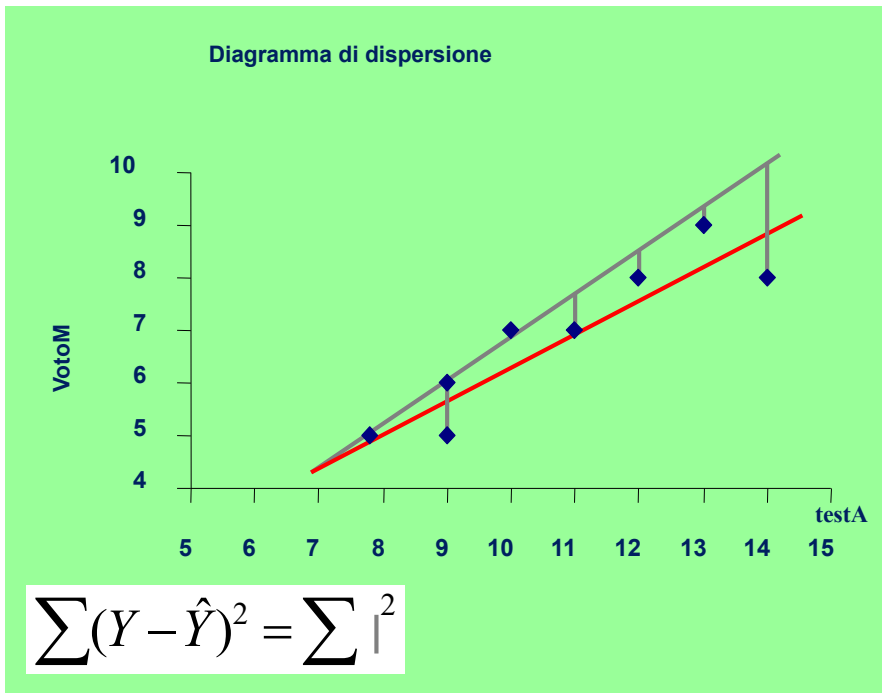
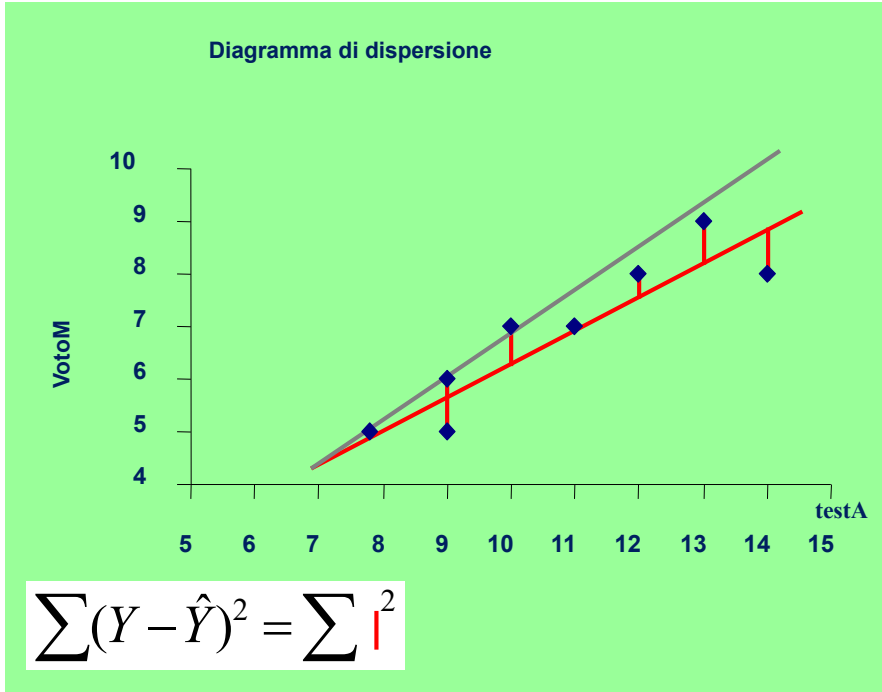
REGRESSIONE LINEARE

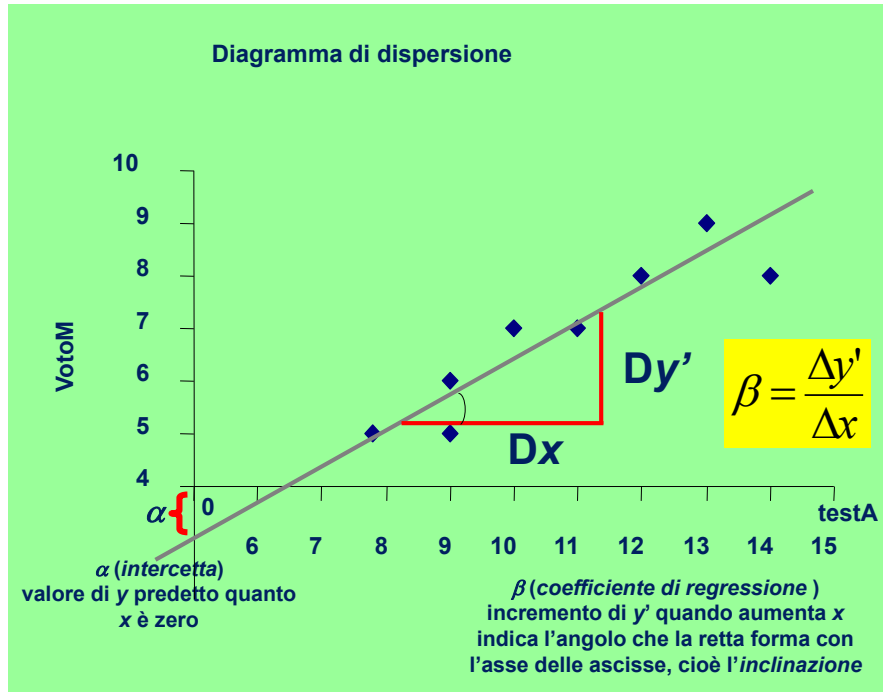
Dato un diagramma di dispersione tra due variabili, la retta di regressione è “**la migliore delle rette**” nel senso che è quella retta che passa più vicina a tutti i punti (minimizza tutte le distanze tra i punti e la retta).

Si sceglie in base al **metodo dei minimi quadrati**. Si definisce “migliore” la retta che rende minima la **somma dei quadrati degli errori**, cioè:

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{più piccolo possibile}$$

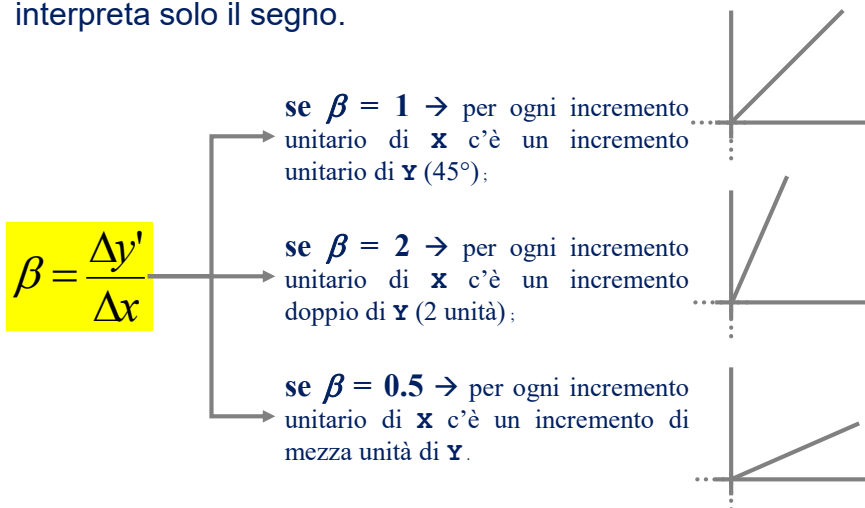






COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

Esprime la relazione tra x e y nei termini delle **unità di misura** delle due variabili. **Non è standardizzato** ($\pm \infty$) e si interpreta solo il segno.



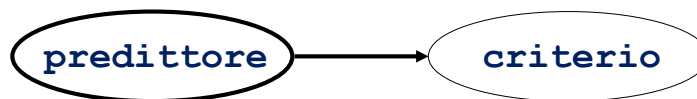
COEFFICIENTE DI REGRESSIONE STANDARDIZZATO

Il **coefficiente di regressione standardizzato** ($\beta \mid \pm 1$) esprime la relazione tra la variabile dipendente (\mathbf{Y}) e la variabile indipendente (\mathbf{x}) in **unità di misura standard** (punti z).

N.B. Solo nella regressione semplice corrisponde al **coefficiente di correlazione**.

COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE

Il **coefficiente di determinazione** (r^2) indica la **proporzione di varianza** (%) della variabile criterio (\mathbf{Y}) “spiegata” da quella del predittore (\mathbf{x}). Il valore è compreso tra 0 e 1.



REGRESSIONE LINEARE

I coefficienti di regressione α e β della **popolazione** vengono stimati a partire dai **coefficienti di regressione campionari** a e b :

POPOLAZIONE

$$Y = \alpha_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

CAMPIONE

$$Y = a_0 + b_1 x_1 + e$$

COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

Il coefficiente di regressione è simboleggiato come:

β (**beta**) quando ci si riferisce al coefficiente **non standardizzato** della popolazione;

b quando ci si riferisce al coefficiente **non standardizzato** calcolato nel campione;

β (**beta**) quando ci si riferisce al **coefficiente standardizzato** (punti z) calcolato nel campione.

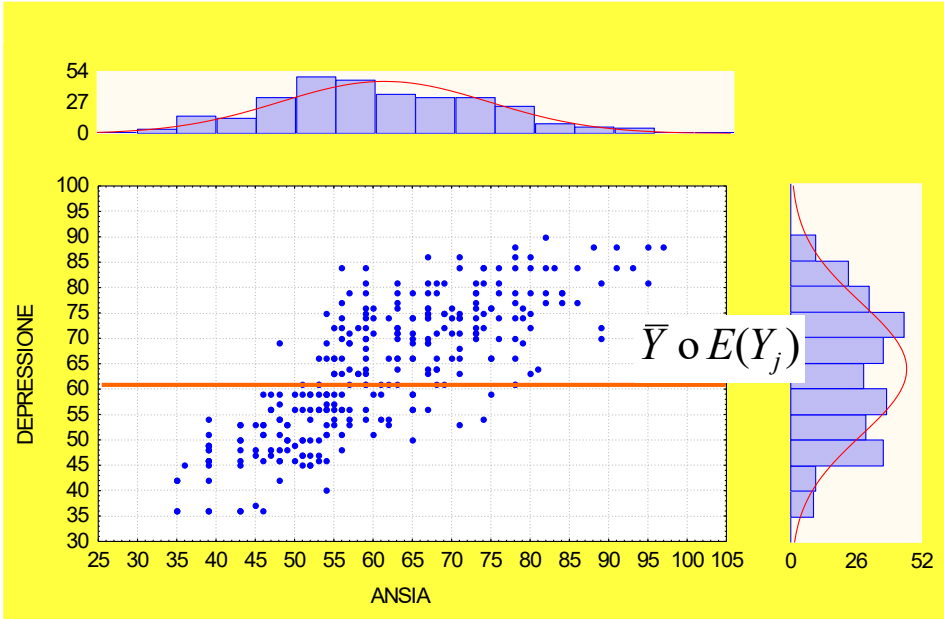
PARAMETRI

Nella **regressione semplice** le formule per il calcolo dei parametri sono le seguenti:

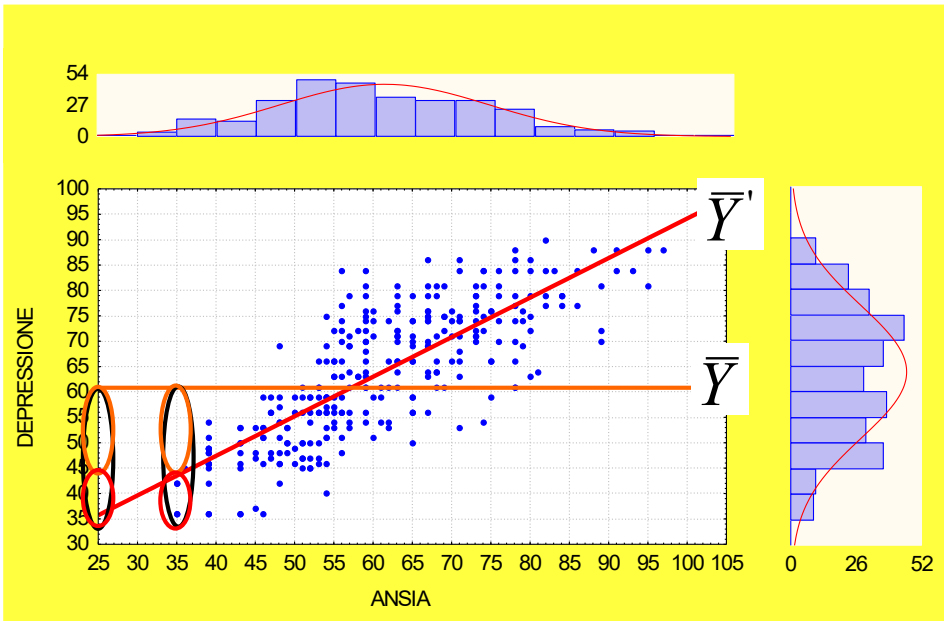
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

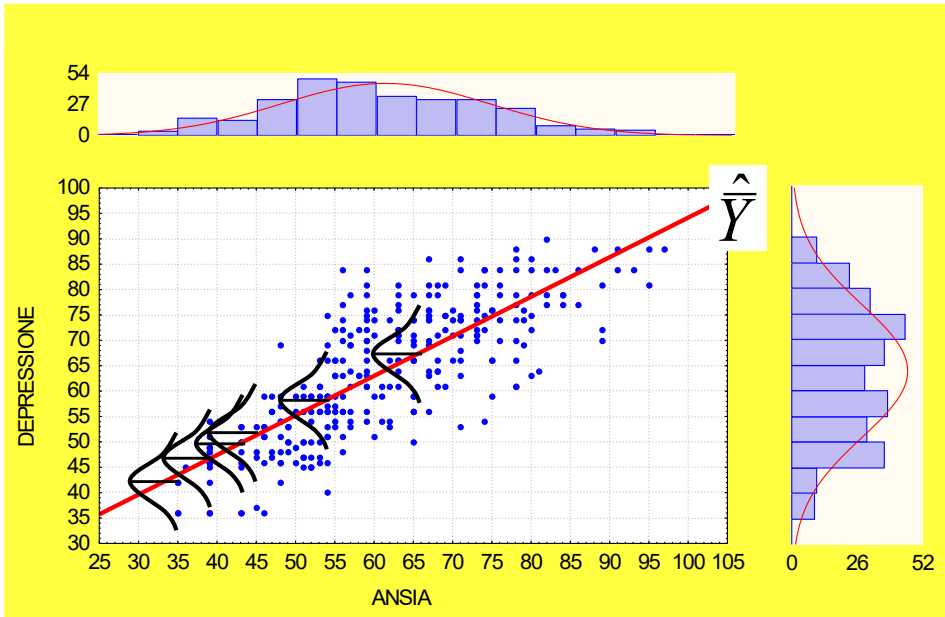
$\bar{Y}_{depression} = 61; ds = 13$



$\bar{Y}_{depression} = 61; ds = 13$



$$\bar{Y}_{depression} = 61; ds = 13$$



SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Scomposizione **Devianza totale**, nelle componenti di **errore** e di **“effetto”**:

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

La somma dei quadrati **totale** (SQ_{tot}) è data da una componente di **errore** (SQ_{err}) e da una componente **spiegata dalla regressione** (SQ_{reg})

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

DEVIANZA SPIEGATA

SQ_{reg}

↓

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

↑

SQ_{err}

DEVIANZA TOTALE DEVIANZA NON SPIEGATA
o RESIDUA

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Per verificare la significatività della previsione, si confrontano le due varianze. La previsione è significativa se la **varianza spiegata** dalla regressione è **maggiore** di quella **residua**.

Le **varianze** si calcolano **dividendo le devianze** per i **gradi di libertà** opportuni.

$$GDL_{tot} = GDL_{reg} + GDL_{err}$$

$$N - 1 = (k) + (N - k - 1)$$

N = numero di osservazioni
 k = numero di predittori

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Per **confrontare la due varianze** e verificare se quella spiegata dalla regressione è maggiore di quella residua, si calcola la statistica **F**. La **varianza spiegata** dalla regressione va al numeratore, quella **residua** al denominatore.

$$F = \frac{\text{varspiegata}}{\text{vare errore}}$$

$$F = \frac{Var_{reg}}{Var_{res}} = \frac{\frac{Dev_{reg}}{k}}{\frac{Dev_{res}}{N-k-1}}$$

H_0 : la varianza spiegata è uguale a quella residua (casuale)
 $H_0: F=1 \Leftrightarrow H_1: F > 1$

$$gdl_F = \frac{k}{n-k-1}$$

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

La verifica dell'ipotesi nulla (**H₀**) fatta utilizzando la statistica **F** riguarda il **modello complessivo**; si assume che tutte le **k** variabili indipendenti **non influenzino** in modo significativo la variabile dipendente:

$$H_0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_1 \text{ o } \beta_2 \text{ o } \beta_3 \text{ o } \dots \text{ o } \beta_k \neq 0$$

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Se la **F** è significativa (H_1) allora l'analisi prosegue per verificare quale **predittore** ha determinato l'effetto. Viene quindi definita una specifica ipotesi nulla (H_0) per ciascun predittore.

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

Solo nella regressione semplice questo test è ridondante dal momento che c'è un solo predittore.

Il test statistico appropriato per la verifica è il valore **t** (un campione):

$$t = \frac{b_i - \beta_{iH_0}}{S_{b_i}} \Rightarrow \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

$$\text{gdl}_t = n - k - 1$$

BONTÀ DI ADATTAMENTO

La statistica maggiormente impiegata per la valutazione della **bontà di adattamento** del modello (**goodness-of-fit**) è l'**R²** (**effect size**) che viene stimato con la seguente formula:

$$R^2 = \frac{\text{dev spiegata}}{\text{dev totale}}$$

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{Y}_j - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}$$

Il **coefficiente di determinazione** (R^2) indica la **proporzione di varianza** (%) della variabile criterio (**Y**) "spiegata" da quella del predittore (**X**). Il valore è compreso tra 0 e 1.

ASSUNZIONI

Oltre all'assunzione di **linearità** la regressione multipla si basa sulle seguenti assunzioni:

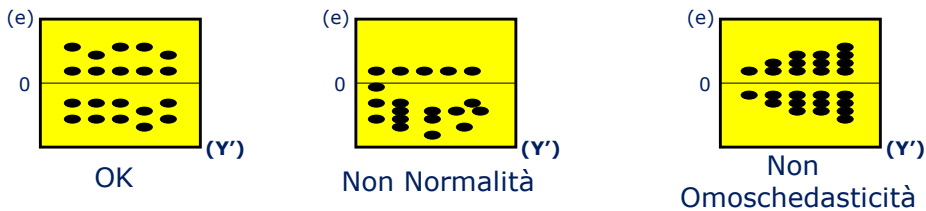
Nessun errore di **specificazione** (no variabili irrilevanti, si variabili rilevanti);

Nessun errore di **misurazione** della/e variabile/i indipendente/i;

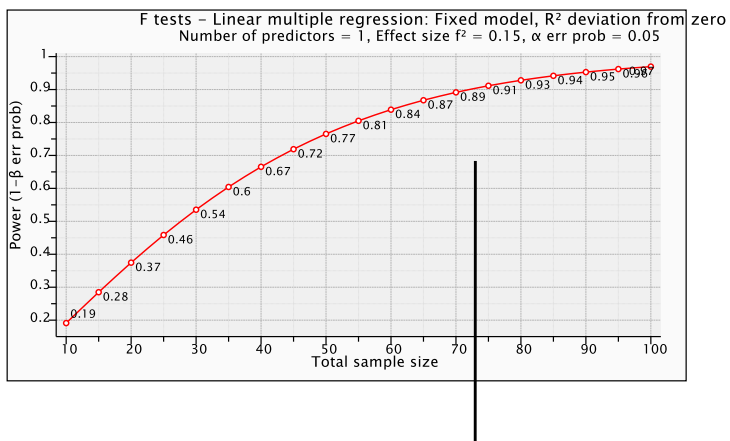
La **media** degli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto deve essere uguale a **0**;

Gli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto debbono essere **indipendenti** e distribuiti **normalmente**;

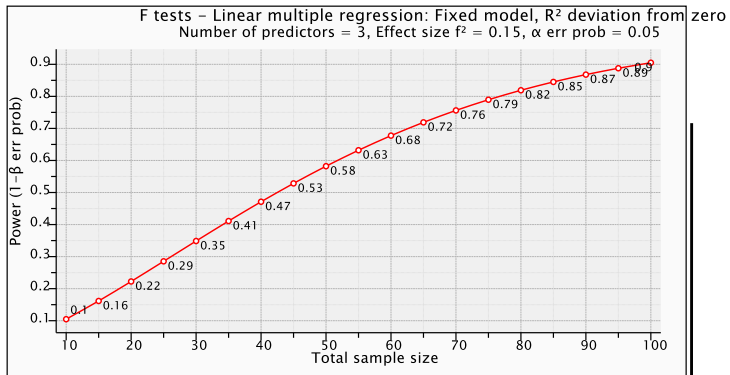
La **varianza** degli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto deve essere **uguale** (omoschedastica).



POWER ($k = 1$)

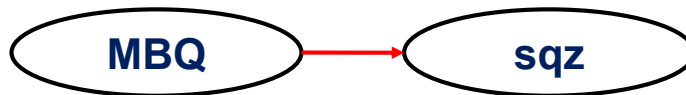


POWER ($k = 3$)



ESEMPIO #1

Il voto medio in matematica predice il voto al test di statistica?



Regressione semplice con una variabile indipendente (MBQ; VI-I) e una variabile dipendente (sqz; VD-I).

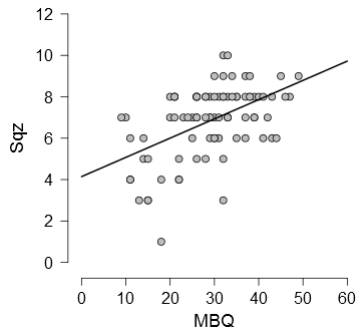
$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

$$\alpha = .05$$

ESEMPIO #1

Analisi grafica della relazione



Correlazione

Pearson Correlations			
		MBQ	Sqz
MBQ	Pearson's r	—	0.508
	p-value	—	< .001
Sqz	Pearson's r	—	—
	p-value	—	—

ESEMPIO #1

Model Summary

Model	R	R ²	Adjusted R ²	RMSE
1	0.508	0.258	0.249	1.504

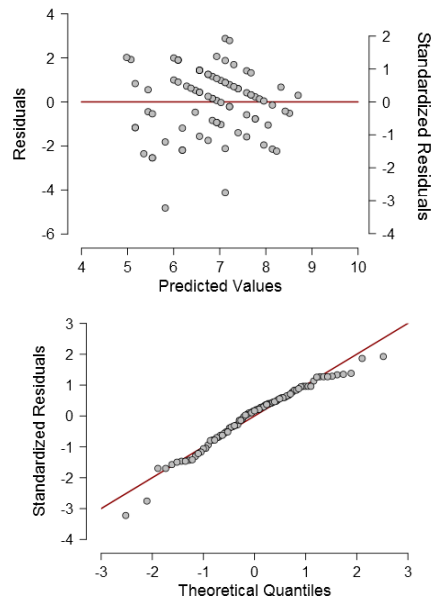
ANOVA

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
1	Regression	65.26	1	65.260	28.85	< .001
	Residual	187.75	83	2.262		
	Total	253.01	84			

Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p	2.5%	97.5%
1	intercept	4.144	0.529		7.834	< .001	3.092	5.196
	MBQ	0.093	0.017	0.508	5.371	< .001	0.059	0.127

ESEMPIO #1



ESEMPIO #1

Questo risultato ci porta a respingere l'ipotesi nulla e a supportare l'ipotesi alternativa.

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

Il voto medio in matematica (MBQ) influenza significativamente il voto al test di statistica (sqz), $F(1,83) = 28.85$, $p < .001$, $R^2 = .258$. In particolare, i dati evidenziano una relazione positiva tra le due variabili, $b = 0.093$, $\beta = .508$, $95\%CI_b [0.059;0.127]$, ovvero coloro che hanno un voto in matematica più alto hanno un voto maggiore al test di statistica.

ESEMPIO #2

L'età influenza la capacità di copiare la figura di Rey?



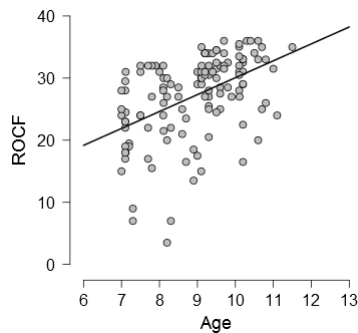
Regressione semplice con una variabile indipendente (Età; VI-R) e una variabile dipendente (ROCF; VD-R).

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

$$\alpha = .05$$

ESEMPIO #2

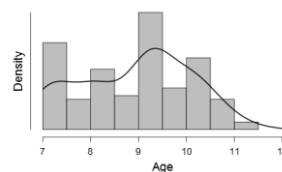


Pearson Correlations

		Age	ROCF
Age	Pearson's r	—	0.470
	p-value	—	< .001
ROCF	Pearson's r	—	—
	p-value	—	—

Dati reali

N = 127



ESEMPIO #2

Model Summary

Model	R	R ²	Adjusted R ²	RMSE
1	0.470	0.221	0.215	5.941

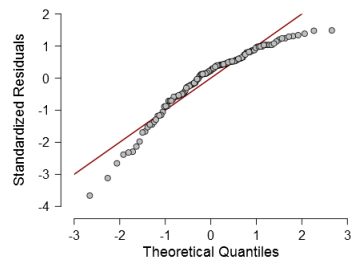
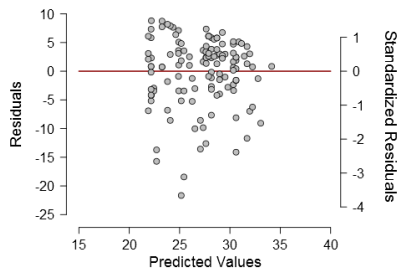
ANOVA

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
1	Regression	1251	1	1250.92	35.44	< .001
	Residual	4412	125	35.29		
	Total	5663	126			

Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p	2.5%	97.5%
1	intercept	2.833	4.120		0.687	0.493	-5.322	10.987
	Age	2.723	0.457	0.470	5.953	< .001	1.818	3.629

ESEMPIO #2



ESEMPIO #2

