



# TECNICHE DI ANALISI DEI DATI

**AA 2019/2020**

**PROF. V.P. SENESE**

Questi materiali sono disponibili per tutti gli studenti al seguente indirizzo:

[http://psiclab.altervista.org/TecnAnDat2020/2019\\_2020.html](http://psiclab.altervista.org/TecnAnDat2020/2019_2020.html)

Università della Campania «Luigi Vanvitelli» – Dipartimento di Psicologia – TECNICHE DI ANALISI DEI DATI – © Prof. V.P. Senese

## MODELLI LINEARI

### LA REGRESSIONE

LA REGRESSIONE **SEMPLICE** (E **MULTIPLA**)

### L'ANALISI DELLA VARIANZA

DISEGNI **UNIVARIATI** (DISEGNI **FATTORIALI** SEMPLICI E MISTI)

# MODELLI LINEARI

Quando in una ricerca è possibile distinguere (in base alla teoria) tra **variabili indipendenti** e **variabili dipendenti** il ricercatore può essere interessato a verificare la presenza della **relazione causale** supposta (tra le variabili) nei dati raccolti (osservazioni campionarie).

Prima di iniziare un qualsiasi discorso sulle relazioni di causalità tra variabili dobbiamo ribadire la distinzione tra **covarianza** e **causazione**.

# MODELLI LINEARI

## **COVARIANZA**

(Covarianza, Correlazione o Associazione):

quando “semplicemente” osserviamo che due variabili presentano variazioni concomitanti.

## **CAUSAZIONE:**

quando pensiamo che siano proprio le variazioni della variabile X a determinare le variazioni della variabile Y. Identifichiamo la DIREZIONALITÀ e l'esistenza del LEGAME DIRETTO tra le due variabili.

Mentre la covarianza è osservabile la causazione appartiene al dominio della teoria!!!

# REGRESSIONE LINEARE

Quando la relazione si riferisce a due variabili di tipo **quantitativo** (I o R) l'analisi che può essere impiegata è l'analisi della **regressione lineare**.

In questo caso l'obiettivo è quello di voler verificare se la capacità di prevedere i valori di una data variabile **Y**, **E(Y)**, aumenta conoscendo i valori assunti da una data variabile **X**.

# REGRESSIONE LINEARE

## PREVISIONE DEI PUNTEGGI

Sappiamo che quando non conosciamo il punteggio  $Y_i$  di un soggetto, la migliore previsione che possiamo fare è usare come valore di riferimento il punteggio medio in  $Y$ :

$$Y_i = \mu_Y + \varepsilon$$

$$Y_i = E(Y) + \varepsilon$$

### Ipotesi:

Questo modello assume che tutti le osservazioni vengono dalla stessa popolazione e che le differenze osservate sono dovute solo all'errore.

# REGRESSIONE LINEARE

Se supponiamo che il punteggio  $Y_i$  **dipende dal punteggio**  $X_i$  del soggetto, possiamo provare a prevedere il valore di  $Y$  in base alla seguente formula:

$$E(Y_i) = \mu_Y + \beta X_i + \varepsilon_i$$

In pratica, ipotizziamo che (mantenendo la componente stocastica) se la teoria è vera, allora il valore atteso di  $Y$  è funzione **lineare** di  $X$ .

# REGRESSIONE LINEARE

L'analisi di regressione (lineare) è una tecnica di analisi dei dati che esamina la relazione tra una (o più) variabili esplicative (VI o *predittori*) e una variabile criterio (o VD). Lo studio della relazione può avere un duplice scopo:

- **ESPLICATIVO**

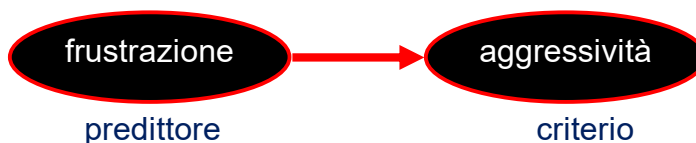
*es. sottoporre a verifica un modello teorico*

- **PREDITTIVO**

*es. individuare la combinazione lineare di variabili che consentono di stimare in modo ottimale la VD*

# REGRESSIONE LINEARE

La regressione lineare si dice **semplice** quando abbiamo una sola **VD** (o criterio) e una sola **VI** (o predittore). L'ipotesi che viene formulata riguarda l'influenza della VI sulla VD.

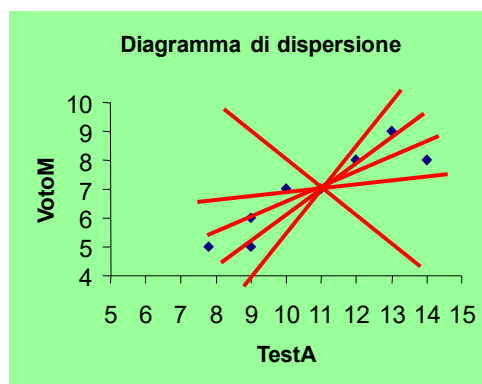


$$\widehat{Y} = \underbrace{\alpha}_{\text{costante}} + \underbrace{\beta x}_{\text{predittore}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{errore}}$$

Labels above the equation:  $\widehat{Y}$  is labeled "criterio",  $\alpha$  is labeled "costante",  $\beta x$  is labeled "coefficiente" and "predittore", and  $\varepsilon$  is labeled "errore".

# REGRESSIONE LINEARE

Da un punto di vista grafico viene individuata quella **retta** che, data la relazione tra le variabili, consente di **prevedere al meglio** i punteggi nella variabile dipendente a partire da quelli nella variabile indipendente.



# REGRESSIONE LINEARE

Dato un diagramma di dispersione tra due variabili, la retta di regressione è “**la migliore delle rette**” nel senso che è quella retta che passa più vicina a tutti i punti (minimizza tutte le distanze tra i punti e la retta).

Si sceglie in base al **metodo dei minimi quadrati**. Si definisce “migliore” la retta che rende minima la **somma dei quadrati degli errori**, cioè:

$$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{più piccolo possibile}$$

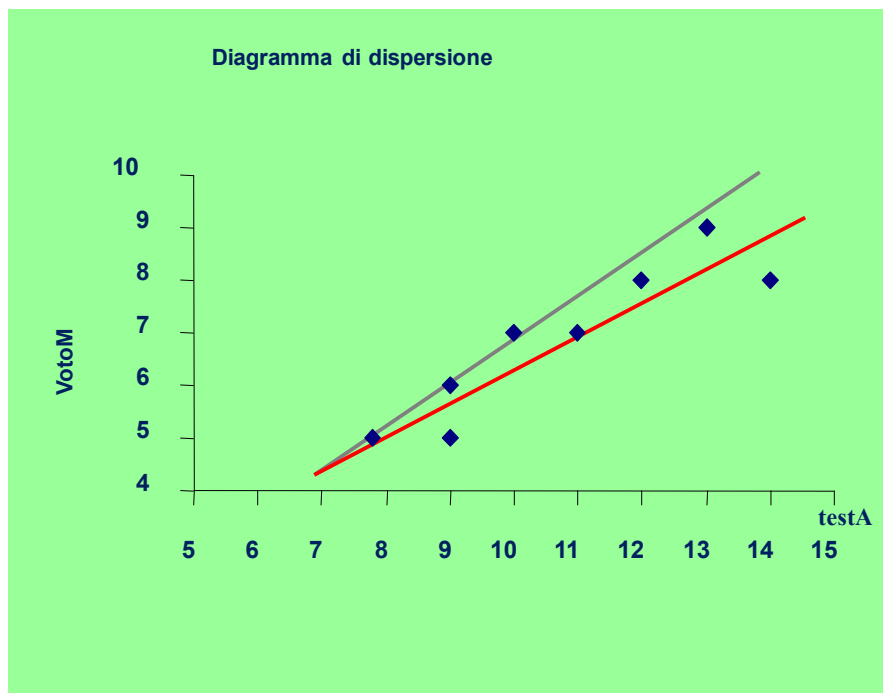
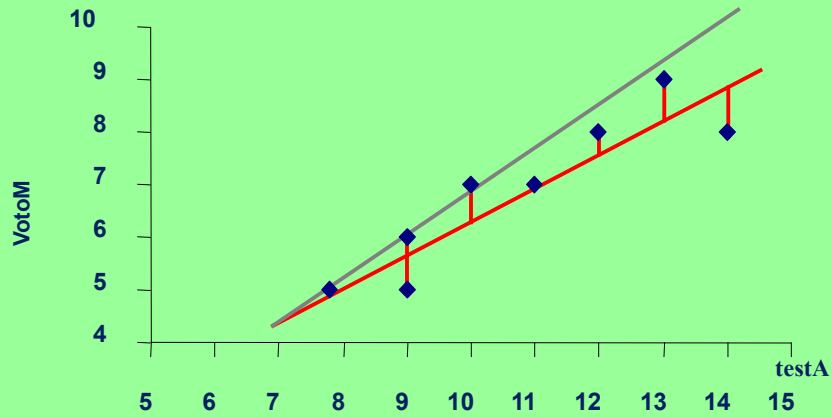
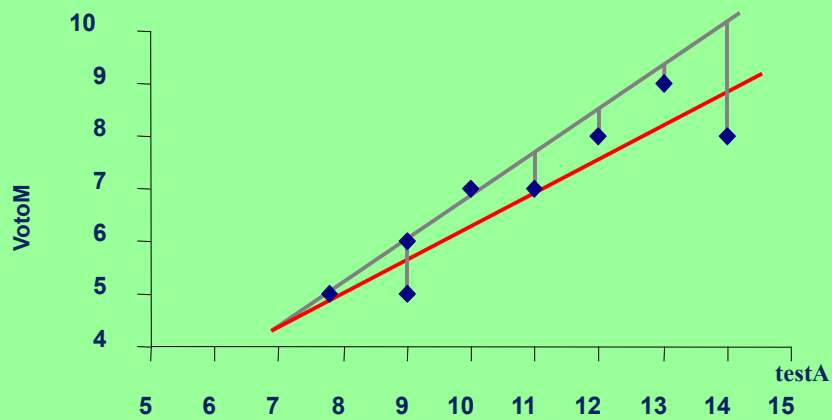


Diagramma di dispersione

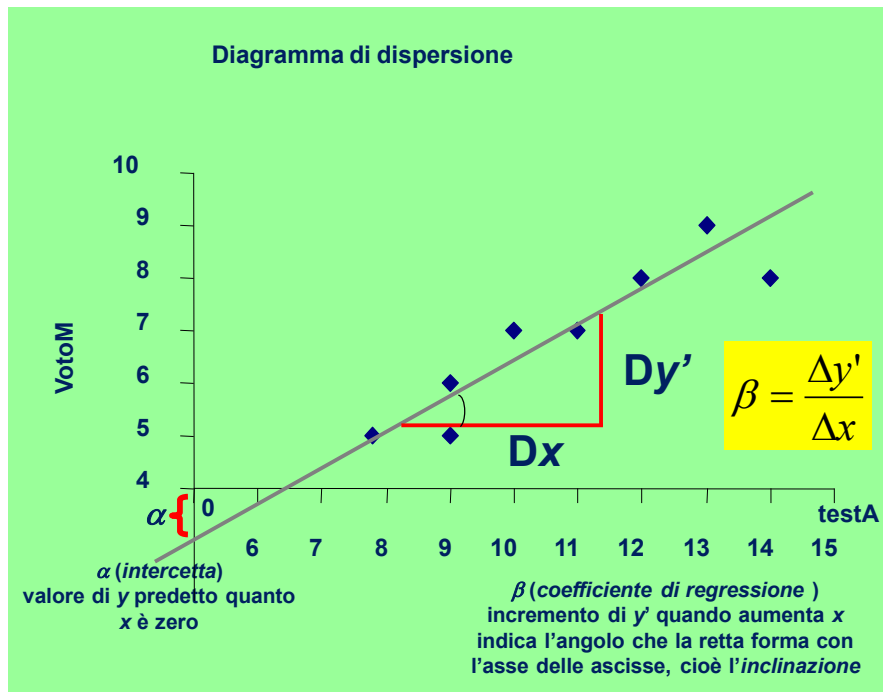


$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum |r|^2$$

Diagramma di dispersione

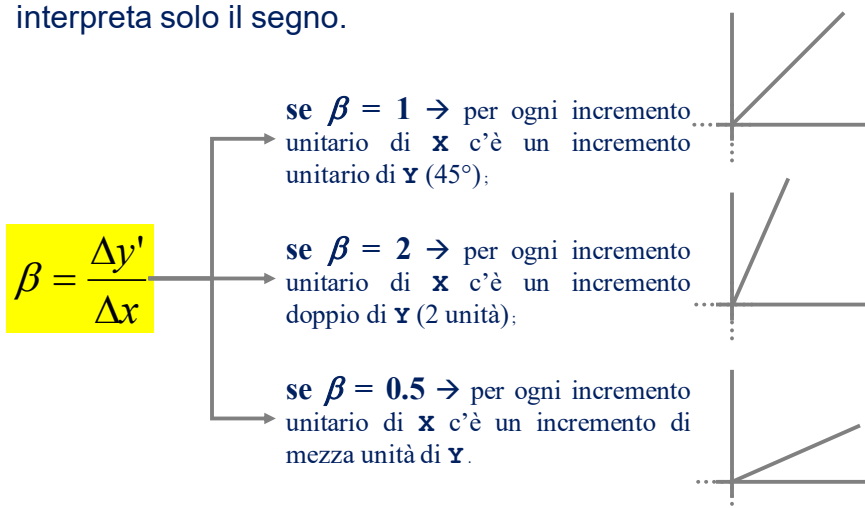


$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum |r|^2$$



## COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

Esprime la relazione tra  $x$  e  $y$  nei termini delle **unità di misura** delle due variabili. **Non è standardizzato** ( $\pm \infty$ ) e si interpreta solo il segno.





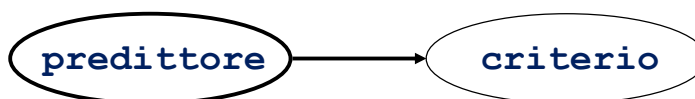
## COEFFICIENTE DI REGRESSIONE STANDARDIZZATO

Il **coefficiente di regressione standardizzato** ( $\beta \mid \pm 1$ ) esprime la relazione tra la variabile dipendente ( $\mathbf{Y}$ ) e la variabile indipendente ( $\mathbf{x}$ ) in **unità di misura standard** (punti z).

**N.B.** Solo nella regressione semplice corrisponde al **coefficiente di correlazione**.

## COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE

Il **coefficiente di determinazione** ( $r^2$ ) indica la **proporzione di varianza** (%) della variabile criterio ( $\mathbf{Y}$ ) “spiegata” da quella del predittore ( $\mathbf{x}$ ). Il valore è compreso tra 0 e 1.



## REGRESSIONE LINEARE

I coefficienti di regressione  $\alpha$  e  $\beta$  della **popolazione** vengono stimati a partire dai **coefficienti di regressione campionari**  $a$  e  $b$ :

POPOLAZIONE

$$Y = \alpha_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

CAMPIONE

$$Y = a_0 + b_1 x_1 + e$$

## COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

Il coefficiente di regressione è simboleggiato come:

$\beta$  (**beta**) quando ci si riferisce al coefficiente **non standardizzato** della popolazione;

$b$  quando ci si riferisce al coefficiente **non standardizzato** calcolato nel campione;

$\beta$  (**beta**) quando ci si riferisce al **coefficiente standardizzato** (**punti z**) calcolato nel campione.

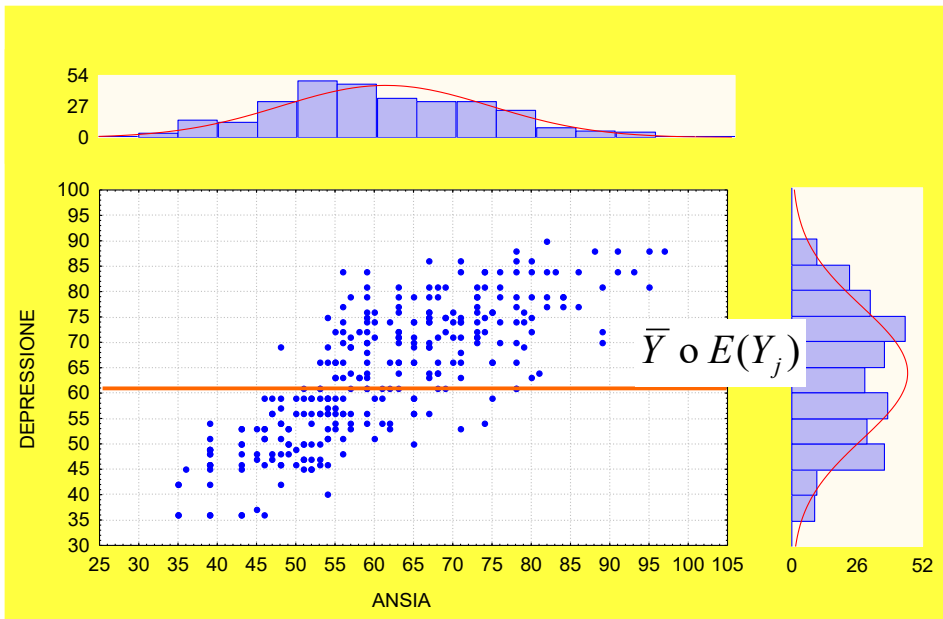
## PARAMETRI

Nella **regressione semplice** le formule per il calcolo dei parametri sono le seguenti:

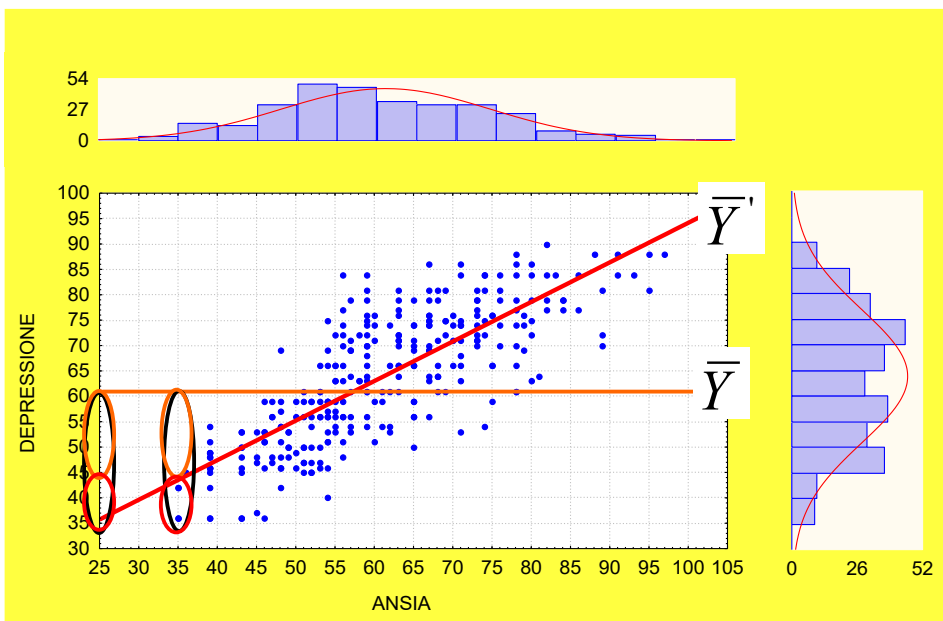
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

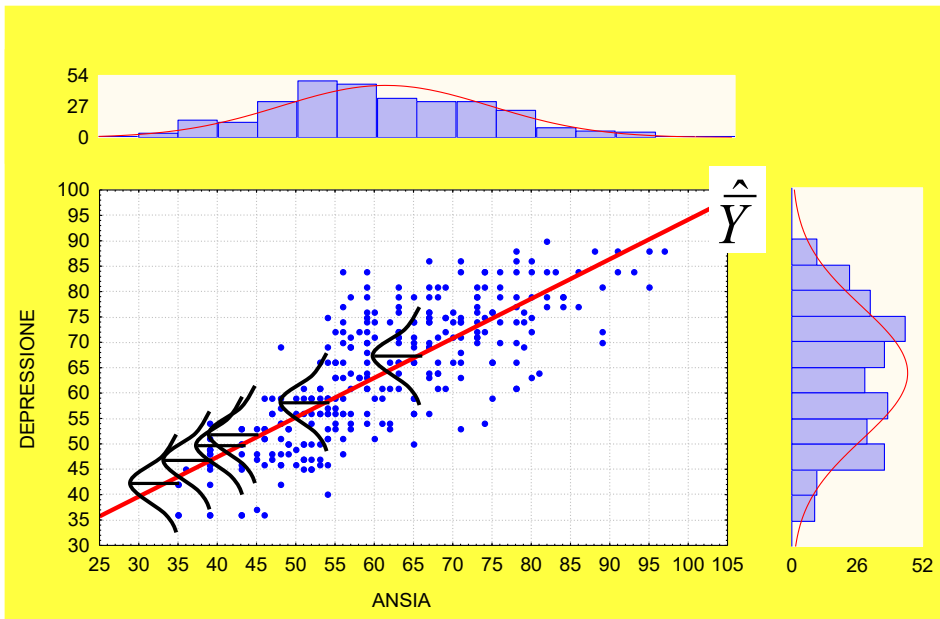
$$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$$



$$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$$



$$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$$



## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Scomposizione **Devianza totale**, nelle componenti di **errore** e di **“effetto”**:

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

La somma dei quadrati **totale** ( $SQ_{tot}$ ) è data da una componente di **errore** ( $SQ_{err}$ ) e da una componente **spiegata dalla regressione** ( $SQ_{reg}$ )

## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

DEVIANZA SPIEGATA

$SQ_{reg}$

↓

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

↑

$SQ_{err}$

DEVIANZA TOTALE                      DEVIANZA NON SPIEGATA  
o RESIDUA

## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Per verificare la significatività della previsione, si confrontano le due varianze. La previsione è significativa se la **varianza spiegata** dalla regressione è **maggiore** di quella **residua**.

Le **varianze** si calcolano **dividendo le devianze** per i **gradi di libertà** opportuni.

$$GDL_{tot} = GDL_{reg} + GDL_{err}$$

$$N - 1 = (k) + (N - k - 1)$$

$N$  = numero di osservazioni  
 $k$  = numero di predittori

## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Per **confrontare la due varianze** e verificare se quella spiegata dalla regressione è maggiore di quella residua, si calcola la statistica **F**. La **varianza spiegata** dalla regressione va al numeratore, quella **residua** al denominatore.

$$F = \frac{\text{var spiegata}}{\text{var errore}}$$

$$F = \frac{Var_{reg}}{Var_{res}} = \frac{\frac{Dev_{reg}}{k}}{\frac{Dev_{res}}{N - k - 1}}$$

$H_0$  : la varianza spiegata è uguale a quella residua (casuale)

$H_0 : F = 1 \Leftrightarrow H_1 : F > 1$

$$gdl_F = \frac{k}{n - k - 1}$$

## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

La verifica dell'ipotesi nulla (**H<sub>0</sub>**) fatta utilizzando la statistica **F** riguarda il **modello complessivo**; si assume che tutte le **k** variabili indipendenti **non influenzino** in modo significativo la variabile dipendente:

$$H_0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_1 \circ \beta_2 \circ \beta_3 \circ \dots \circ \beta_k \neq 0$$

## SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Se la **F** è significativa ( $H_1$ ) allora l'analisi prosegue per verificare quale **predittore** ha determinato l'effetto. Viene quindi definita una specifica ipotesi nulla ( $H_0$ ) per ciascun predittore.

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

Solo nella regressione semplice questo test è ridondante dal momento che c'è un solo predittore.

Il test statistico appropriato per la verifica è il valore **t** (un campione):

$$t = \frac{b_i - \beta_{iH_0}}{S_{b_i}} \Rightarrow \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

$$\text{gdl}_t = n - k - 1$$

## BONTÀ DI ADATTAMENTO

La statistica maggiormente impiegata per la valutazione della **bontà di adattamento** del modello (**goodness-of-fit**) è l'**R<sup>2</sup>** (**effect size**) che viene stimato con la seguente formula:

$$R^2 = \frac{\text{dev spiegata}}{\text{dev totale}}$$

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{Y}_j - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}$$

Il **coefficiente di determinazione** ( $R^2$ ) indica la **proporzione di varianza** (%) della variabile criterio (**Y**) "spiegata" da quella del predittore (**X**). Il valore è compreso tra 0 e 1.

# ASSUNZIONI

Oltre all'assunzione di **linearità** la regressione multipla si basa sulle seguenti assunzioni:

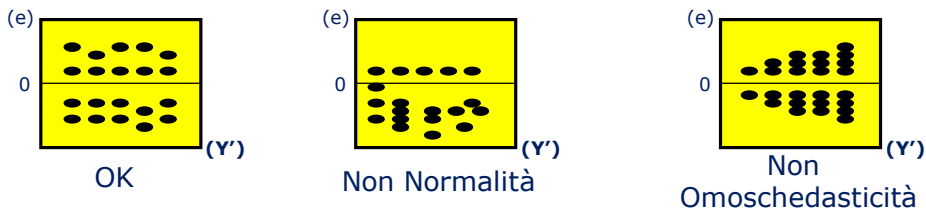
Nessun errore di **specificazione** (no variabili irrilevanti, si variabili rilevanti);

Nessun errore di **misurazione** della/e variabile/i indipendente/i;

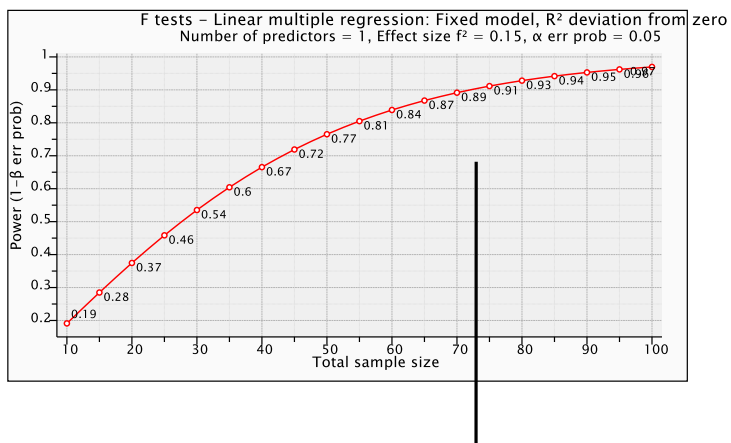
La **media** degli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto deve essere uguale a **0**;

Gli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto debbono essere **indipendenti** e distribuiti **normalmente**;

La **varianza** degli errori di predizione (e) attorno ad ogni valore (Y') predetto deve essere **uguale** (omoschedastica).

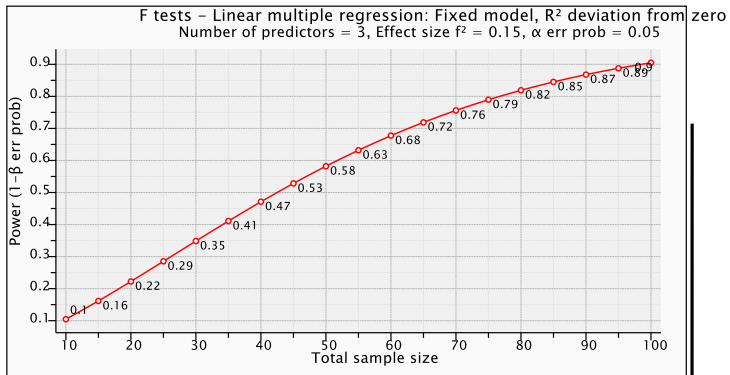


## POWER ( $k = 1$ )



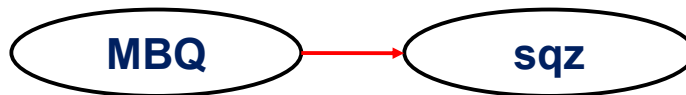


# POWER ( $k = 3$ )



## ESEMPIO #1

Il voto medio in matematica predice il voto al test di statistica?



**Regressione semplice** con una variabile indipendente (MBQ; VI-I) e una variabile dipendente (sqz; VD-I).

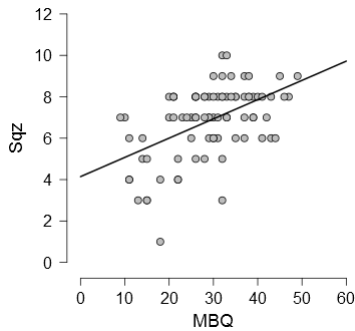
$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

$$\alpha = .05$$

# ESEMPIO #1

Analisi grafica della relazione



Correlazione

Pearson Correlations			
		MBQ	Sqz
MBQ	Pearson's r	—	0.508
	p-value	—	< .001
Sqz	Pearson's r		—
	p-value		—

# ESEMPIO #1

Model Summary

Model	R	R <sup>2</sup>	Adjusted R <sup>2</sup>	RMSE
1	0.508	0.258	0.249	1.504

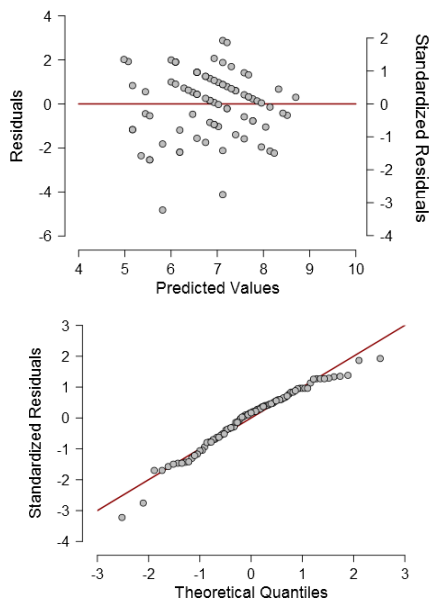
ANOVA

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
1	Regression	65.26	1	65.260	28.85	< .001
	Residual	187.75	83	2.262		
	Total	253.01	84			

Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p	2.5%	97.5%
1	intercept	4.144	0.529		7.834	< .001	3.092	5.196
	MBQ	0.093	0.017	0.508	5.371	< .001	0.059	0.127

## ESEMPIO #1



## ESEMPIO #1

Questo risultato ci porta a respingere l'ipotesi nulla e a supportare l'ipotesi alternativa.

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

Il voto medio in matematica (MBQ) influenza significativamente il voto al test di statistica (sqz),  $F(1,83) = 28.85$ ,  $p < .001$ ,  $R^2 = .258$ . In particolare, i dati evidenziano una relazione positiva tra le due variabili,  $b = 0.093$ ,  $\beta = .508$ ,  $95\%CI_b [0.059;0.127]$ , ovvero coloro che hanno un voto in matematica più alto hanno un voto maggiore al test di statistica.

## ESEMPIO #2

L'età influenza la capacità di copiare la figura di Rey?



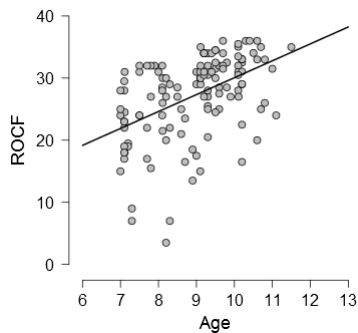
**Regressione semplice** con una variabile indipendente (Età; VI-R) e una variabile dipendente (ROCF; VD-R).

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

$$\alpha = .05$$

## ESEMPIO #2

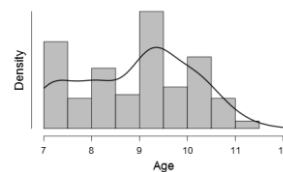


Pearson Correlations

		Age	ROCF
Age	Pearson's r	—	0.470
	p-value	—	< .001
ROCF	Pearson's r	—	—
	p-value	—	—

**Dati reali**

**N = 127**



# ESEMPIO #2

Model Summary

Model	R	R <sup>2</sup>	Adjusted R <sup>2</sup>	RMSE
1	0.470	0.221	0.215	5.941

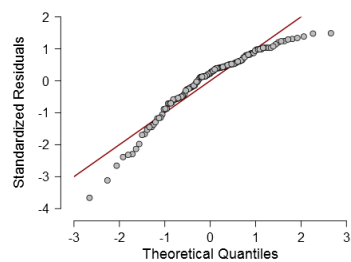
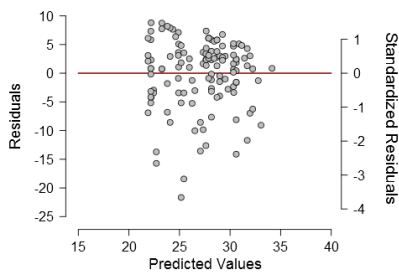
ANOVA

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
1	Regression	1251	1	1250.92	35.44	< .001
	Residual	4412	125	35.29		
	Total	5663	126			

Coefficients

Model		Unstandardized	Standard Error	Standardized	t	p	2.5%	97.5%
1	intercept	2.833	4.120		0.687	0.493	-5.322	10.987
	Age	2.723	0.457	0.470	5.953	< .001	1.818	3.629

# ESEMPIO #2



## ESEMPIO #2

