METODI E TECNICHE DELLA RICERCA IN PSICOLOGIA CLINICA E LABORATORIO

AA 2016/2017

PROF. V.P. SENESE

http://psiclab.altervista.org/MetTecPsicClinica2016/2015_2016.html

I MODELLI LINEARI GENERALIZZATI

GLM

GLM

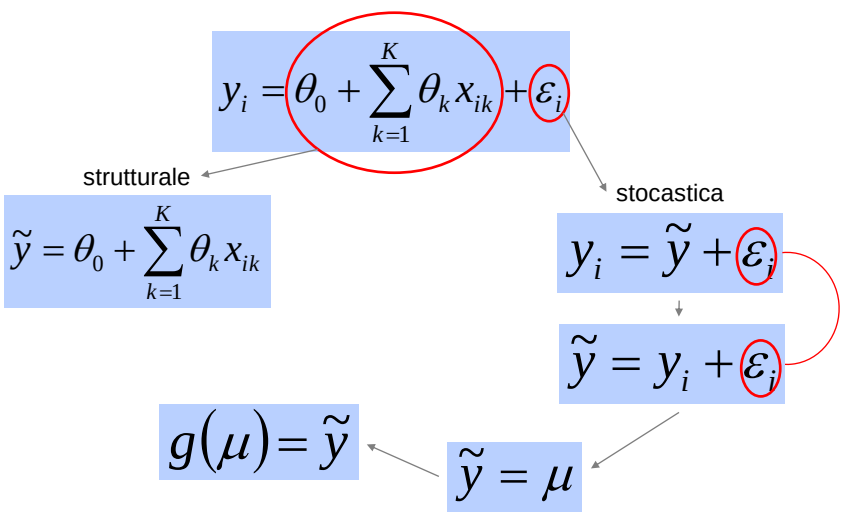
Secondo la teoria dei ***Modelli Lineari Generalizzati*** (**GLM**), la **regressione lineare**, l'**analisi della varianza** (**ANOVA**), la **regressione logistica** e i **modelli log-lineari** possono essere visti come casi speciali di una **classe più generale di modelli** che condividono: (a) alcune proprietà di base; (b) i metodi di stima dei parametri, e (c) le statistiche di *fit* (Miceli, 2001).

$$y_i = \overset{\alpha}{\theta_0} + \overset{\beta}{\sum_{k=1}^{K} \theta_k x_{ik}} + \varepsilon_i$$

n. scalare

$$y = X \cdot \theta + \varepsilon$$

n. vettoriale



Dove **g()** indica una generica funzione che viene detta "legame funzionale" (*link function*). Il modello lineare classico (***distribuzione gaussiana***) diventa così un caso particolare dei **GLM** dove il legame funzionale è quello dell'identità.

La **componente d'errore** può essere vista come la risultante delle variabili esplicative omesse (numerose), dell'errore casuale e dell'errore di misura casuale (Miceli, 2001).

GLM

	Legame canonico	Legame funzionale	Distribuzione
●	$\mu = \tilde{y}$	Identità	Normale (Gaussiana)
	$\log(\mu) = \tilde{y}$	Logaritmo	Poisson; Multinomiale; Prodotto multinomiale
●	$\log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) = \tilde{y}$	Logit	Binomiale; Multinomiale

LE ASSUNZIONI NEI GLM

ASSUNZIONI DEI GLM

• **misure**: tutte le **variabili indipendenti** sono misurate su scala ad **intervalli**, a **rapporti** o **dicotomica**;

• **modello**: la relazione tra **variabili indipendenti** e **dipendente** è **lineare**, **proporzionale** (invariante) e **additiva**;

• **specificazioni**: **tutti i predittori rilevanti** per la variabile dipendente sono stati inseriti nell'analisi, nessun **predittore irrilevante** è stato inserito (**parsimonia**);

• **valore atteso dell'errore**: gli errori sono esclusivamente di tipo casuale, relativi alla sola **variabile dipendente** e il valore atteso dell'errore **ε** (*epsilon*) è **0**;

• **omoschedasticità**: la varianza del termine d'errore **ε** è la stessa (o è costante) per tutti i valori delle variabili indipendenti;

ASSUNZIONI DEI GLM

• **no autocorrelazioni**: non ci devono essere correlazioni tra i termini dell'errore prodotti da ciascun predittore (matematicamente **E**(ε_i, ε_j) = 0 ; oppure **COV**(ε_i, ε_j) = 0) (**osservazioni indipendenti**);

• **no correlazioni tra errori e predittori**: i termini d'errore devono essere non correlati con le variabili indipendenti (matematicamente E(ε_j, X_j) = 0);

• **assenza di perfetta multicollinearità**: nessuna delle variabili indipendenti deve essere una combinazione lineare perfetta delle altre variabili indipendenti (matematicamente, per ogni variabile i R^2_i < 1, dove R^2_i è la varianza della variabile indipendente X_i spiegata da tutti gli altri predittori (X_1, X_2, …, X_k).

STIMA DEI PARAMETRI
GLM

STIMA DEI PARAMETRI GLM

Per la stima dei parametri dei **GLM** si utilizza il **metodo della massima verosimiglianza** (*maximum likelihood* - ML).
Tale metodo stima i parametri del modello in modo da rendere **massima la probabilità** (verosimiglianza o *log-likelihood function*) di ottenere il valori di **Y** osservati dati i valori delle variabili indipendenti (X_1, X_2, … , X_k).

La **soluzione ottimale** viene raggiunta partendo da dei **valori di prova** per i **parametri** (**arbitrari**) i quali successivamente vengono **modificati** per vedere se la funzione può essere migliorata. Il processo viene ripetuto (*iteration*) fino a quando la capacità di miglioramento della funzione è infinitesimale (*converge*).

Quando le assunzioni dell'OLS sono verificate, le stime dei parametri ottenute mediante il metodo OLS e il metodo ML sono identiche (Eliason, 1993). In questo senso il metodo OLS può essere considerato un caso particolare della ML; quando i parametri sono stimabili direttamente, senza iterazioni.

LA REGRESSIONE

Quando in una ricerca è possibile distinguere (**in base alla teoria**) tra **variabili indipendenti** e **variabili dipendenti** il ricercatore può essere interessato a verificare la presenza della **relazione *causale*** supposta (tra le variabili) nei dati raccolti (osservazioni campionarie).

Prima di iniziare un qualsiasi discorso sulle relazioni di causalità tra variabili dobbiamo ribadire la distinzione tra **covariazione** e **causazione**.

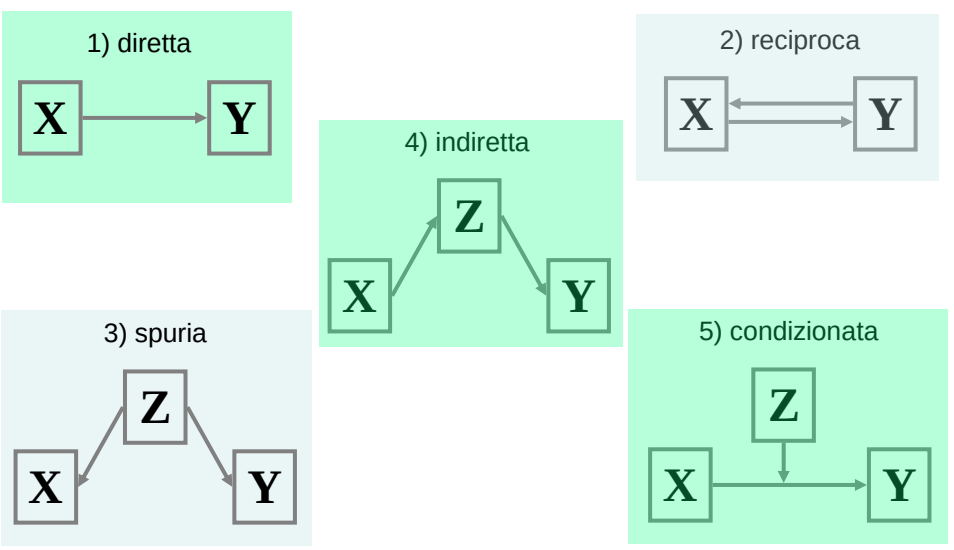
COVARIAZIONE

(Covarianza, Correlazione o Associazione):
quando "semplicemente" osserviamo che due variabili presentano **variazioni concomitanti**.

CAUSAZIONE:
quando pensiamo che siano proprio le variazioni della variabile **X** **a determinare** le variazioni della variabile **Y**. Identifichiamo la DIREZIONALITÀ e l'esistenza del LEGAME DIRETTO tra le due variabili.

Mentre la covariazione è osservabile la causazione appartiene al dominio della teoria!!!

I cinque fondamentali tipi di relazione causale fra due variabili:



LA REGRESSIONE LINEARE SEMPLICE

LA REGRESSIONE LINEARE

Quando la relazione si riferisce a **due variabili** di tipo **cardinale** (**I** o **R**) l'analisi che può essere impiegata è l'**analisi della regressione lineare**.

In questo caso l'obiettivo è quello di voler verificare se la capacità di **prevedere** i valori di una data variabile **Y** aumenta conoscendo i valori assunti da una data variabile **X**.

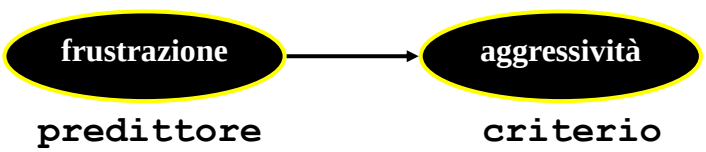
Se supponiamo che il punteggio Y_i **dipende** dal punteggio X_i del soggetto, possiamo **prevedere** il valore in base alla seguente formula:

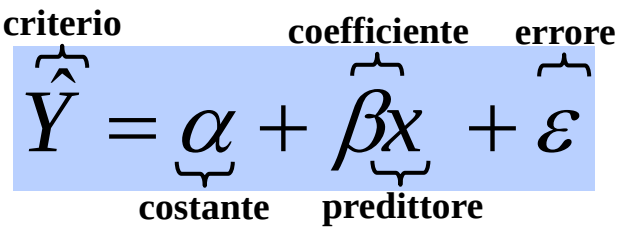
$$Y_i = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

In pratica ipotizziamo che (mantenendo la **componente stocastica**) **se la teoria è vera**, allora la media di **Y** è funzione di **X**.

LA REGRESSIONE

La **regressione lineare** si dice **semplice** quando abbiamo **una sola VD** (o **criterio**) e **una sola VI** (o **predittore**). L'ipotesi che viene formulata riguarda l'influenza della **VI** sulla **VD**.

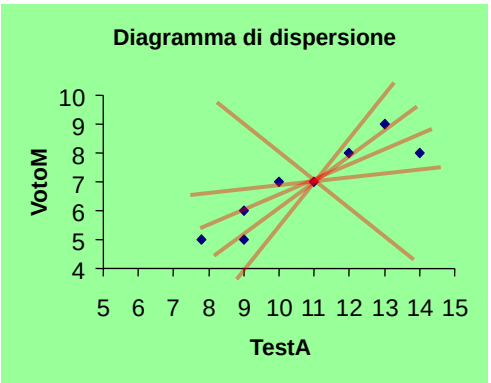




$$\hat{Y} = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

LA REGRESSIONE

Da un punto di vista **grafico** viene individuata quella retta che, data la relazione tra le variabili, consente di **prevedere al meglio** i punteggi nella variabile **dipendente** a partire da quelli nella variabile **indipendente**.



LA REGRESSIONE

Dato un diagramma di dispersione tra due variabili, la **retta di regressione** è "**la migliore delle rette**" nel senso che è **quella retta che passa più vicina a tutti i punti** (minimizza tutte le distanze tra i punti e la retta).

Assecondando questo principio, secondo la teoria classica, la **retta di regressione** si sceglie in base al **metodo dei minimi quadrati.** Si definisce "migliore" la retta che rende minima la **somma dei quadrati degli errori**, cioè:

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = più\ \ piccolo\ \ possibile$$

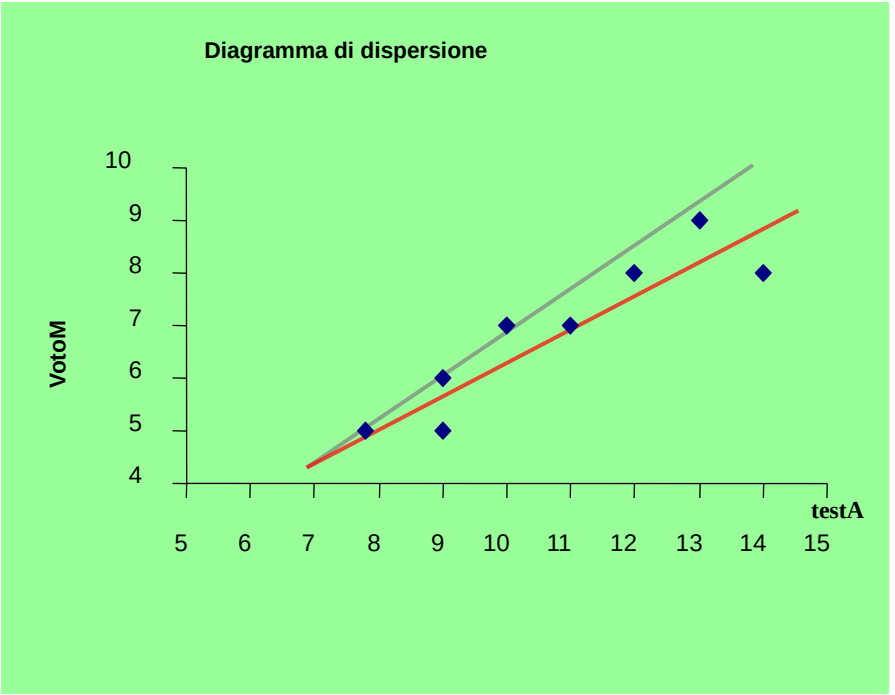


Diagramma di dispersione
VotoM
10
9
8
7
6
5
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
testA

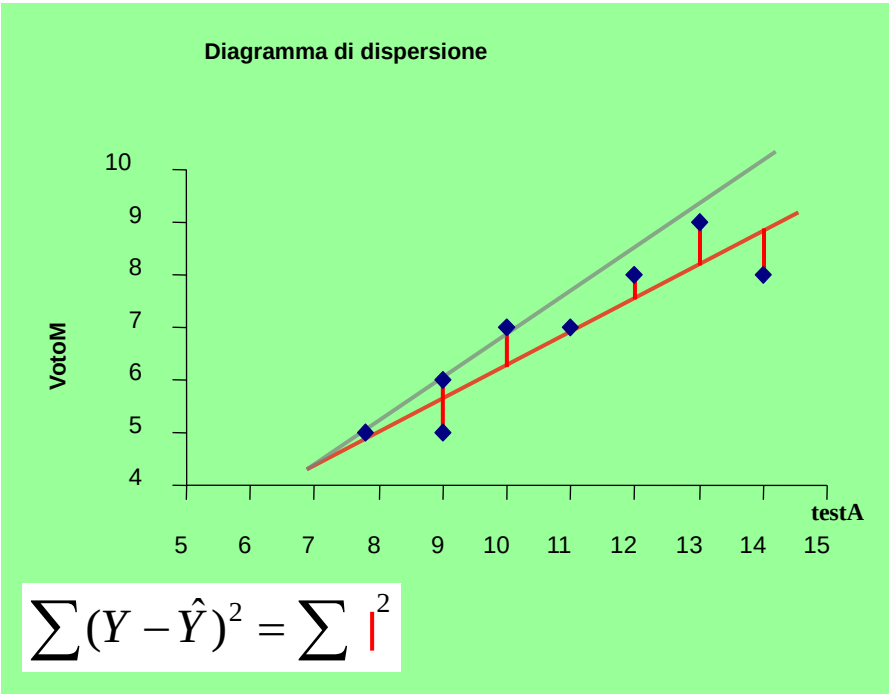
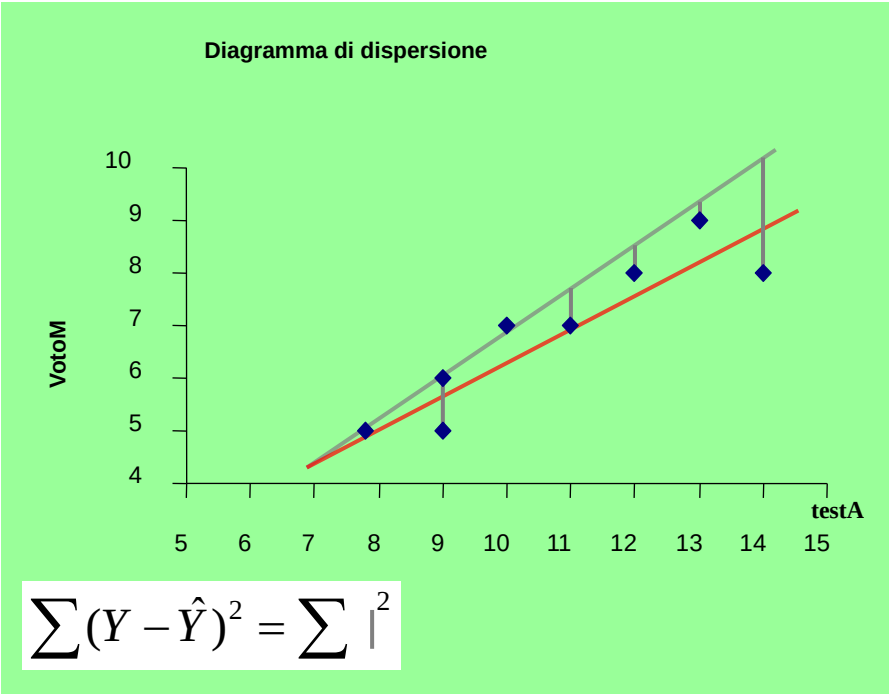
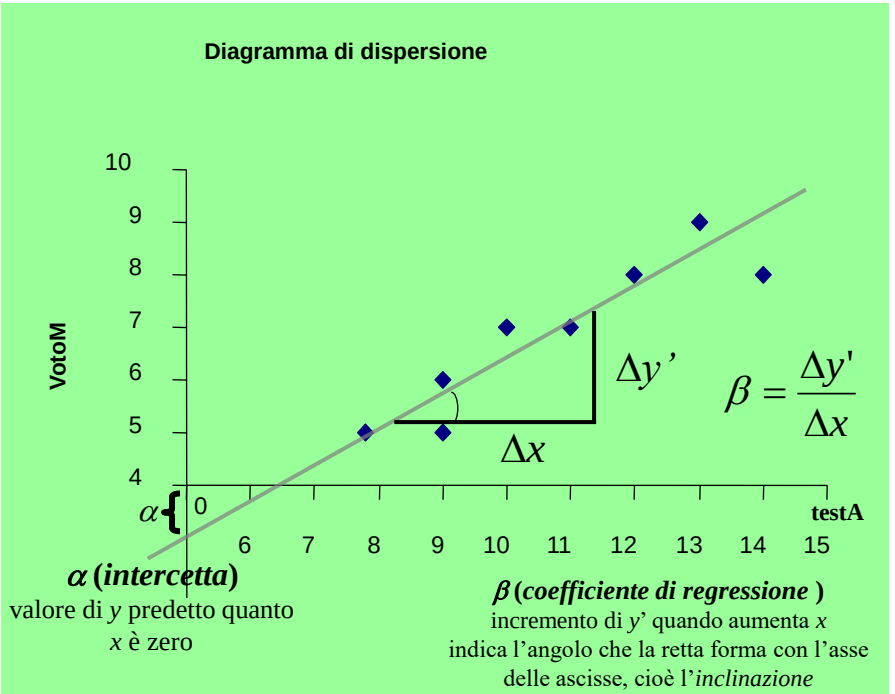


Diagramma di dispersione
VotoM
10
9
8
7
6
5
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
testA
$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum$ |^2



$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum |^2$$



***α* (*intercetta*)**
valore di *y* predetto quanto *x* è zero

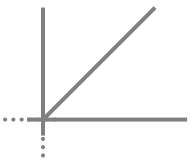
***β* (*coefficiente di regressione*)**
incremento di *y*' quando aumenta *x*
indica l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse, cioè l'*inclinazione*

COEFFICIENTE DI REGRESSIONE

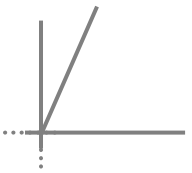
Esprime la relazione tra **X** e **Y** nei termini delle **unità di misura** delle due variabili.

$$\beta = \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

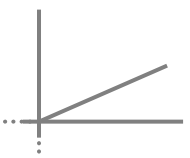
se β = 1 → per ogni incremento unitario di **X** c'è un incremento unitario di **Y** (45°);



se β = 2 → per ogni incremento unitario di **X** c'è un incremento doppio di **Y** (2 unità);



se β = 0.5 → per ogni incremento unitario di **X** c'è un incremento di mezza unità di **Y**.

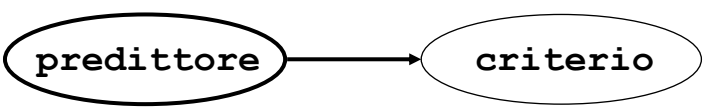


COEFFICIENTE DI REGRESSIONE STANDARDIZZATO

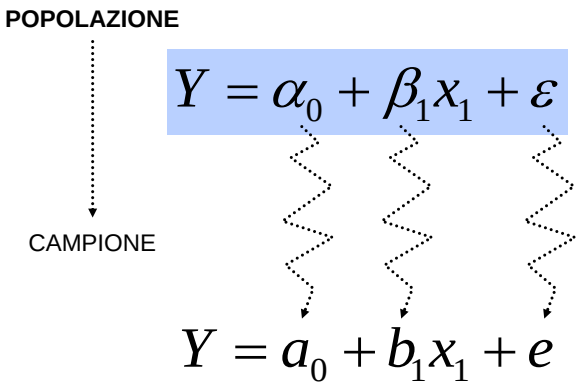
Il *coefficiente di regressione standardizzato* (β) esprime la relazione tra la variabile dipendente (**Y**) e la variabile indipendente (**X**) in unità di misura standard (punti z).

COEFFICIENTE DI DETERMINAZIONE

Il *coefficiente di determinazione* (r^2) indica la **percentuale di varianza** (%) della variabile criterio (**Y**) "spiegata" da quella predittore (**X**).



I coefficienti di regressione α e β della **popolazione** vengono **stimati** a partire dai **coefficienti di regressione campionari** a e b:



Il coefficiente di regressione è simboleggiato come:

β (**beta**) quando ci si riferisce al coefficiente della popolazione;

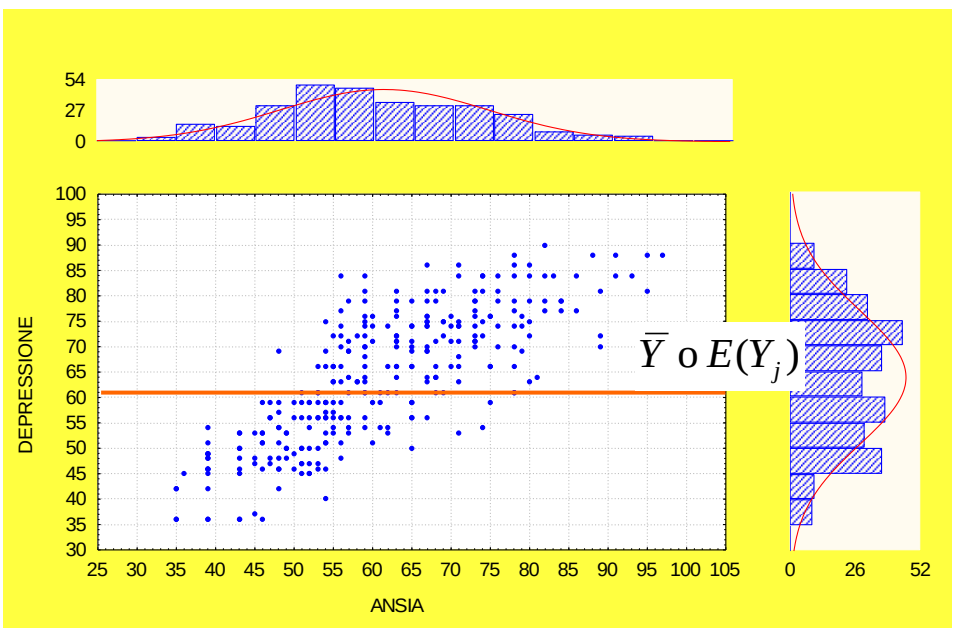
b quando ci si riferisce al coefficiente calcolato nel campione;

β (**beta**) quando ci si riferisce al coefficiente standardizzato (**punti** z) calcolato nel campione.

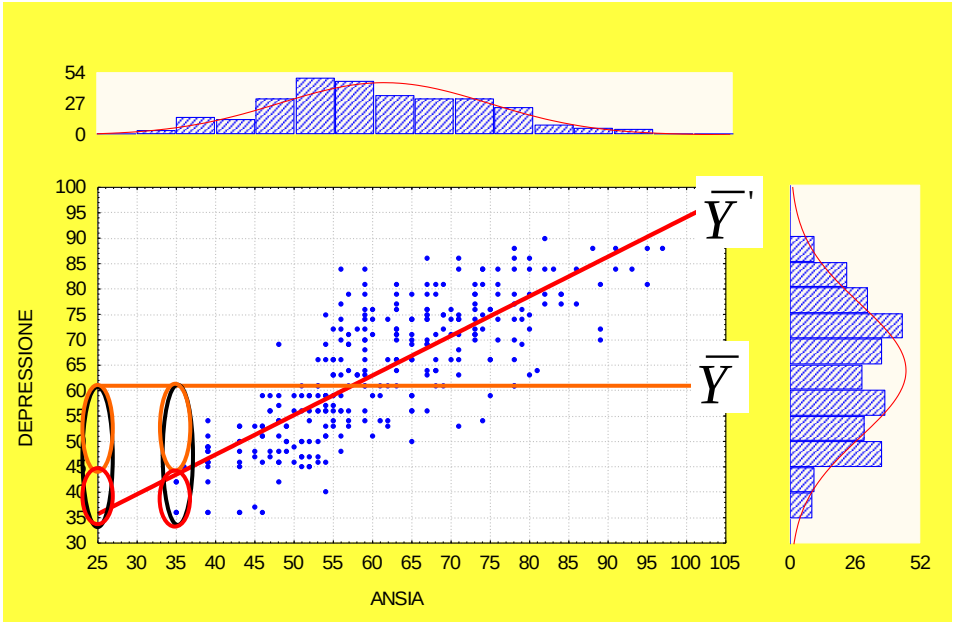
..PRIMA DI ENTRARE NEL VIVO…

LA REGRESSIONE BIVARIATA DA UN PUNTO DI VISTA CONCETTUALE

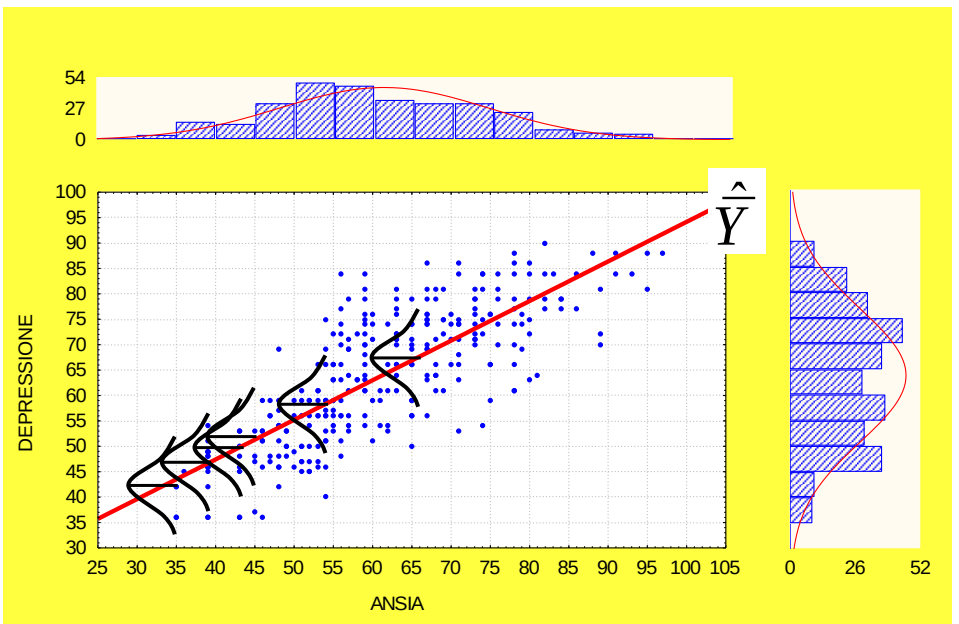
$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$



$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$



$\bar{Y}_{depressione} = 61; ds = 13$



..ENTRIAMO NEL VIVO…

ESERCITAZIONE
REGRESSIONE SEMPLICE

Uno **psicologo** è interessato a verificare se la **qualità della vita** dipende dall'**età**. A tal scopo somministra ad un campione di **8 soggetti** una misura di **qualità della vita (QDV)** e rileva per ciascun soggetto l'**età**.

MODELLO TEORICO

Età dei soggetti espressa in anni (VI, R).

Qualità della vita (QDV) (VD, I).

Variables Entered/Removed[b]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	age[a]	.	Enter

a. All requested variables entered.

b. Dependent Variable: qdv

r^2

errore standard della stima

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.351[a]	.123	-.023	2.961

a. Predictors: (Constant), age

F

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	7.407	1	7.407	.845	.393[a]
	Residual	52.593	6	8.765		
	Total	60.000	7			

a. Predictors: (Constant), age

b. Dependent Variable: qdv

b a

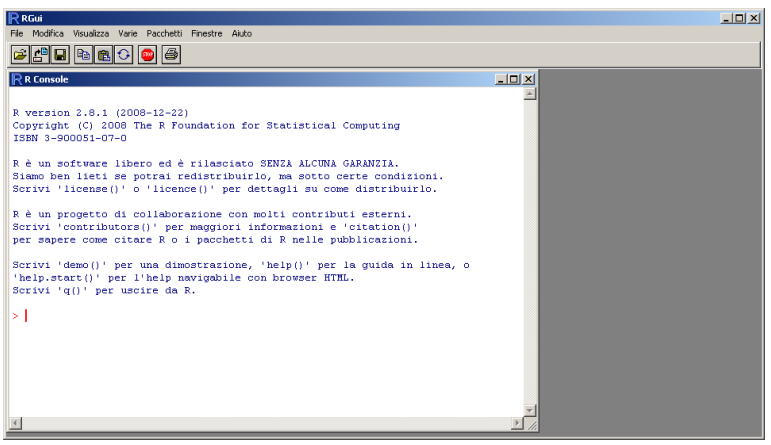
$\beta_{standardizzato}$

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	35.130	27.618		1.272	.250
	age	.741	.806	.351	.919	.393

a. Dependent Variable: qdv

correlazione



Notazione scientifica:
http://it.wikipedia.org/wiki/Notazione_scientifica

$$1.258e-6 = 0.000001258$$

$$\begin{cases} (x \cdot e - 3) = 0.00x \\ (y \cdot e - 5) = 0.0000y \end{cases}$$

```
> glm0<-(glm(qdv ~ 1, family=gaussian)) #Calcolo il modello nullo (H0)
>
> glm1<-(glm(qdv ~ age, family=gaussian)) #Calcolo il modello 1 (H1)
>
> anova(glm0, glm1, test="F") #Faccio il confronto tra i modelli (H0 vs H1)
Analysis of Deviance Table

Model 1: qdv ~ 1
Model 2: qdv ~ age
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance      F Pr(>F)
1         7     60.000
2         6     52.593  1    7.407 0.8451 0.3934

> summary(glm1)

Call:
glm(formula = qdv ~ age, family = gaussian)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.7963  -1.6389  -0.6852   1.5741   4.6852

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 35.1296    27.6180   1.272    0.250
age          0.7407     0.8058   0.919    0.393

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 8.765432)

    Null deviance: 60.000  on 7  degrees of freedom
Residual deviance: 52.593  on 6  degrees of freedom
AIC: 43.768

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

```
> cor.test(age, qdv)

        Pearson's product-moment correlation

data:  age and qdv
t = 0.9193, df = 6, p-value = 0.3934
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.4695737  0.8464570
sample estimates:
      cor
0.3513642
```

..ENTRIAMO NEL VIVO…

INTRODUZIONE ALLA REGRESSIONE MULTIPLA

NELLA FORMA **GENERALE** DEL MODELLO DI REGRESSIONE LA VARIABILE DIPENDENTE **Y** VIENE CONSIDERATA COME FUNZIONE DI ***k*** VARIABILI INDIPENDENTI (X_{1j}; X_{2j}; X_{3j}; …; X_{kj}).

IL MODELLO DELLA REGRESSIONE LINEARE ASSUME CHE DATO UN SET DI VARIABILI INDIPENDENTI IL **VALORE MEDIO** (VALORE ATTESO) DELLA VARIABILE DIPENDENTE SI MODIFICA SECONDO LA SEGUENTE FORMULA:

$$E(Y_j) = \alpha + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + ... + \beta_k X_{kj} + \varepsilon_j$$

$$E(Y_j) = \alpha + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + ... + \beta_k X_{kj} + \varepsilon_j$$

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_k, \varepsilon$$

LE **LETTERE GRECHE** RAPPRESENTANO I PARAMETRI CHE **ESPRIMONO LA RELAZIONE** TRA LE ***k*** **VI** E LA **VD** NELLA POPOLAZIONE

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_k$$

RAPPRESENTANO IL **COEFFICIENTE DI REGRESSIONE PARZIALE** TRA CIASCUNA DELLE ***k*** **VI** E LA **VD Y** **MANTENENDO COSTANTI** (**CONTROLLANDO**) TUTTE LE ALTRE VARIABILI.

$$E(Y_j) = \alpha + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + ... + \beta_k X_{kj} + \varepsilon_j$$

α

È L'INTERCETTA E RAPPRESENTA IL VALORE ATTESO DI **Y** QUANDO **TUTTE LE VI** SONO UGUALI A **ZERO**.

ε

PER OGNI VALORE **Y** PREDETTO (**MANTENENDO COSTANTI I VALORI NELLE VI**) IL MODELLO PREVEDE UNA COMPONENTE D'**ERRORE** (COMPONENTE STOCASTICA) QUESTO TERMINE D'ERRORE RAPPRESENTA: 1) **L'EFFETTO SULLA VD Y NON ESPLICITAMENTE INCLUSO NEL MODELLO**; 2) **UN RESIDUO CASUALE NELLA VARIABILE DIPENDENTE**.

$$E(Y_j) = \alpha + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + ... + \beta_k X_{kj} + \varepsilon_j$$

SEBBENE SIA IMPLICITO NELLA FORMULAZIONE DEL MODELLO È **IMPORTANTE SOTTOLINEARE** CHE LA RELAZIONE TRA $E(Y_j)$ E CIASCUN X_{kj} È CONCEPITA COME **LINEARE** E CHE GLI EFFETTI DELLE k **VI** SONO **ADDITIVI**.

PER UNA **CORRETTA APPLICAZIONE** DEL MODELLO DELLA REGRESSIONE, QUINDI, PER UNA **CORRETTA STIMA DEI PARAMETRI** DELLA POPOLAZIONE E PER LA **VERIFICA DELLE IPOTESI** È **NECESSARIO** CHE ALCUNE **ASSUNZIONI** SIANO VERIFICATE.

NELL'APPLICAZIONE DELLA REGRESSIONE MULTIPLA **NON** CI TROVIAMO NELLA CONDIZIONE DI CONOSCERE I PARAMETRI DELLA POPOLAZIONE DIRETTAMENTE, MA SI **STIMANO** A PARTIRE DA UN NUMERO FINITO DI OSSERVAZIONI: LE **OSSERVAZIONI CAMPIONARIE**

PER DISTINGUERE LA **REGRESSIONE CAMPIONARIA** DA QUELLA DELLA **POPOLAZIONE** IL MODELLO DI REGRESSIONE VIENE SCRITTO IN QUESTO MODO:

$$E(Y_j) = a + b_1 X_{1j} + b_2 X_{2j} + b_3 X_{3j} + \ldots + b_k X_{kj} + e_j$$

DOVE LE **LETTERE LATINE** INDICANO I PARAMETRI DEL MODELLO **STIMATI A PARTIRE DAL CAMPIONE** (***n***)

PER LA **STIMA DEI PARAMETRI** a E b_i (i = 1, 2, …, k) IL METODO PIÙ FREQUENTEMENTE IMPIEGATO È IL CRITERIO DEI MINIMI QUADRATI (**ORDINARY LEAST SQUARE** – **OLS**).

LO SCOPO È QUELLO DI STIMARE I PARAMETRI **a** E $\mathbf{b}_i$ IN MODO TALE CHE SI **RIDUCA AL MINIMO** LA DISTANZA AL QUADRATO TRA VALORE **PREDETTO** (Y_j') E VALORE **OSSERVATO** (Y_j)

$$\sum_{j=1}^{n} (Y_j - \hat{Y}_j)^2$$

NELLA **REGRESSIONE BIVARIATA** LE FORMULE SONO LE SEGUENTI:

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \qquad a = \bar{Y} - b_i\bar{X}$$

NELLA **REGRESSIONE MULTIPLA** LE FORMULE PER IL CALCOLO DEI PARAMETRI RICHIEDONO L'ALGEBRA MATRICIALE.

DAL MOMENTO CHE SI TRATTA DI **STIME CAMPIONARE** DEI PARAMETRI È NECESSARIO CONOSCERE L'EFFETTO DELL'**ERRORE** SULLA STIMA. PER FARE CIÒ È NECESSARIO CALCOLARE L'**ERRORE STANDARD** (s_i) DEL COEFFICIENTE STIMATO:

$$s_{b_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2(1 - R_i^2)(n - k - 1)}}$$

DOVE: ***n*** È L'AMPIEZZA CAMPIONARIA; ***k*** È IL NUMERO DI VI DEL MODELLO; R^2_i È LA CORRELAZIONE MULTIPLA AL QUADRATO DELLA **VI**$_i$ SU TUTTE LE ALTRE **VI**.

$$s_{b_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2(1 - R_i^2)(n - k - 1)}}$$

DELLA FORMULA È UTILE NOTARE CHE L'ERRORE DI STIMA DI $\mathbf{b_i}$ ($\mathbf{s_b}$) **SI RIDUCE** SE:

- AL NUMERATORE: È MINORE L'ERRORE DI STIMA DI $\mathbf{Y_j}$
- AL DENOMINATORE:
  - È MAGGIORE LA VARIANZA DI $\mathbf{X_i}$
  - È MINORE LA CORRELAZIONE DI $\mathbf{X_i}$ CON LE ALTRE **VI**
  - È MAGGIORE IL NUMERO DELLE OSSERVAZIONI ***n*** *(SE IL NUMERO DI PREDITTORI AUMENTA E SI APPROSSIMA ALL'AMPIEZZA CAMPIONARIA, s AUMENTA NOTEVOLMENTE)*

UN ALTRO ASPETTO UTILE ALLA VALUTAZIONE DEL MODELLO DI REGRESSIONE È LA VALUTAZIONE DELLA **BONTÀ DI ADATTAMENTO** DEL MODELLO (***goodness-of-fit***). LA STATISTICA MAGGIORMENTE IMPIEGATA È L'$\mathbf{R^2}$, CHE VIENE STIMATA CON LE SEGUENTI FORMULE:

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(\hat{Y}_j - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2}$$

o

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{Y}_j)^2}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = \frac{\text{dev spiegata}}{\text{dev totale}}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\text{dev errore}}{\text{dev totale}}$$

UN'ALTRA STATISTICA COMUNEMENTE IMPIEGATA PER LA VALUTAZIONE DELLA **BONTÀ DI ADATTAMENTO** DEL MODELLO (***goodness-of-fit***) È L'**ERRORE STANDARD DELLA STIMA**, CHE VIENE STIMATO CON LA SEGUENTE FORMULA:

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \hat{Y}_j\right)^2}{n-2}}$$

$$s_e = \sqrt{\frac{devianza\_residua}{gdl(dev\_res)}}$$

L'R^2 VARIA **SEMPRE** TRA **0** E **1**. PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME LA **PERCENTUALE DI VARIANZA** (**%**) DELLA **VD** **SPIEGATA** DALLE **VI** CONSIDERATE NEL MODELLO. OPPURE COME LA **%** DI RIDUZIONE DELL'ERRORE NELLA PREVISIONE DELLA **VI.**

NELL'UTILIZZO DELL'R^2 DUE ASPETTI DEVONO ESSERE SOTTOLINEATI:

- **È DIPENDENTE DAL CAMPIONE.** DUE MODELLI APPLICATI SU DUE CAMPIONI POSSONO AVERE DEI PARAMETRI ***b*** IDENTICI MA R^2 DIFFERENTI; QUESTO È DETERMINATO DALLA DIVERSA VARIANZA DI **Y**;
- **È INFLUENZATO DAL NUMERO DI PREDITTORI.** A PARITÀ DI CAMPIONE PER CONFRONTARE DUE MODELLI È NECESSARIO CALCOLARE UN VALORE CORRETTO (**ADJUSTED R^2**) (WONNACOTT, WONNACOTT, 1979).

$$\overline{R}^2 = \left(R^2 - \frac{k}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n-k-1}\right)$$

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

Scomposizione Devianza totale, nelle componenti di errore e di "effetto"

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

La somma dei quadrati ***totale*** (SQ_{tot}) è data da una componente di ***errore*** (SQ_{err}) e da una componente ***spiegata dalla regressione*** (SQ_{reg})

SIGNIFICATIVITÀ DELLA PREVISIONE

$$SQ_{tot} = SQ_{reg} + SQ_{err}$$

DEVIANZA SPIEGATA dalla regressione SQ_{reg}

DEVIANZA TOTALE SQ_{tot}

$$\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

SQ_{err}

DEVIANZA NON SPIEGATA o RESIDUA (somma di *e*)

NELLA RICERCA PSICOLOGICA NON SIAMO INTERESSATI ESCLUSIVAMENTE ALLA **STIMA DEI PARAMETRI** DELLA POPOLAZIONE, MA SIAMO INTERESSATI A VOLER **VERIFICARE SE I PARAMETRI CAMPIONARI SONO VICINI A QUELLI DELLA POPOLAZIONE**, VALE A DIRE ALLA **VERIFICA DELLE IPOTESI**.

CIÒ AVVIENE MEDIANTE IL **TEST DELLA SIGNIFICATIVITÀ STATISTICA** CHE VALUTA LO SCOSTAMENTO DEL PARAMETRO OSSERVATO DAL VALORE ATTESO SECONDO L'**IPOTESI NULLA** ($\mathbf{H_0}$).

Per verificare se la previsione è significativa la **varianza spiegata** dalla regressione deve essere **maggiore** di quella residua.

Le **varianze** si calcolano **dividendo le devianze** per i **gradi di libertà** opportuni.

$$GDL_{tot} = GDL_{reg} + GDL_{err}$$

$$N - 1 = (k) + (N - k - 1)$$

Per **confrontare la due varianze** e verificare se quella spiegata dalla regressione è maggiore di quella residua, si calcola la statistica **F** .

La **varianza spiegata** dalla regressione va al numeratore, quella **residua** al denominatore ⇨ $F_{critico(k,N-k-1)}$.

$$F = \frac{Var_{reg}}{Var_{res}} = \frac{\frac{Dev_{reg}}{k}}{\frac{Dev_{res}}{N-k-1}}$$

H_0 : la varianz a spiegata è uguale a quella residua (casuale)

PER IL **MODELLO COMPLESSIVO**, CON ***k*** **VI**, L'IPOTESI NULLA (**H_0**) è LA SEGUENTE:

$$H_0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_1 \, o \, \beta_2 \, o \, \beta_3 \, o ... o \, \beta_k \neq 0$$

Un modo **alternativo** per definire il **test statistico** della verifica è mediante il valore dell'**R^2**:

$$F = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1-R^2)}{(n-k-1)}}$$

$$F = \frac{\text{var spiegata}}{\text{var errore}}$$

$$gdl_F = \frac{k}{n-k-1}$$

PER **CIASCUN PREDITTORE** VIENE POI DEFINITA UNA SPECIFICA IPOTESI NULLA (**H_0**).

$$H_0 \Rightarrow \beta_i = 0$$

$$H_1 \Rightarrow \beta_i \neq 0$$

IL TEST STATISTICO APPROPRIATO È IL VALORE ***t***:

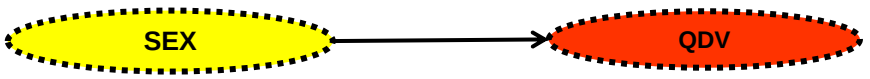
$$t = \frac{b_i - \beta_{i_{H_0}}}{s_{b_i}} \Rightarrow \frac{b_i}{s_{b_i}}$$

$$gdl_t = n - k - 1$$

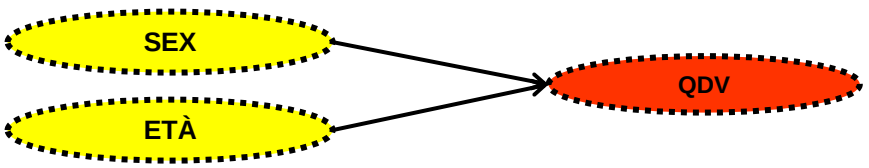
ESERCITAZIONE INTRODUZIONE ALLA REGRESSIONE MULTIPLA

ESEMPIO

MODELLO TEORICO 1



MODELLO TEORICO 2



VARIABILI *DUMMY*

Il modello della regressione lineare può essere esteso facilmente per inserire predittori misurati su scala dicotomica, inclusi *set* di variabili dicotomizzate o variabili *dummy* (si veda Lewis-Beck, 1980; Berry e Feldman, 1985; Hardy, 1993).

Es.
SESSO: 1=M; 2=F;
LIVELLO SOCIO-ECONOMICO: 1=Basso; 2=Medio; 3=Alto.

COD	SESSO	LSE
1	1	1
2	2	2
…	…	
100	1	3

COD	M	MEDIO	ALTO
1	1	0	0
2	0	1	0
…	…		
100	1	0	1

NdE -1

Qualità della vita (QDV)

COD	SEX	QDV
1	0	61
2	1	61
3	0	59
4	1	57
5	1	63
6	0	57
7	1	60
8	0	58

$$QDV = \alpha + \beta(SEX)$$

$$QDV = \alpha + \beta(0) = \alpha$$ Media femmine

$$QDV = \alpha + \beta(1) = \alpha + \beta$$ Media maschi

Group Statistics

	sex	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
qdv	0	4	58.00	.816	.408
	1	4	63.00	1.633	.816

OUTPUT REGRESSIONE

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.913[a]	.833	.806	1.291

a. Predictors: (Constant), sex

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	58.000	.645		89.853	.000
	sex	5.000	.913	.913	5.477	.002

a. Dependent Variable: qdv

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	50.000	1	50.000	30.000	.002[a]
	Residual	10.000	6	1.667		
	Total	60.000	7			

a. Predictors: (Constant), sex

b. Dependent Variable: qdv

$$QDV_F = \alpha = 58$$

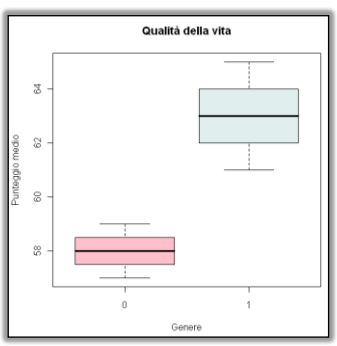
$$QDV_M = \alpha + \beta = 58 + 5 = 63$$

MODELLO TEORICO 1

```
> aggregate(prova[,c(3,4)],list(prova$sex),mean)#Medie differenziate per fattore
  Group.1   age qdv
1       0 33.75  58
2       1 34.75  63
```

```
> anova(glm0, glm2, test="F") #Confronto tra i modelli
Analysis of Deviance Table

Model 1: qdv ~ 1
Model 2: qdv ~ sex
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  F    Pr(>F)
1         7         60
2         6         10  1       50 30 0.001547 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

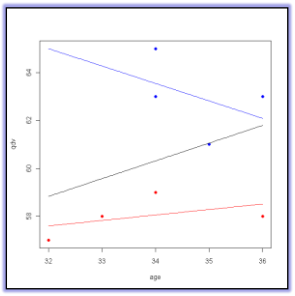
```
> summary(glm2)

Call:
glm(formula = qdv ~ sex, family = gaussian)

Deviance Residuals:
       Min          1Q      Median          3Q         Max
-2.000e+00  -2.500e-01   3.553e-15   2.500e-01   2.000e+00

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   58.0000     0.6455  89.853 1.28e-10 ***
sex            5.0000     0.9129   5.477  0.00155 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 1.666667)

    Null deviance: 60  on 7  degrees of freedom
Residual deviance: 10  on 6  degrees of freedom
AIC: 30.488

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```



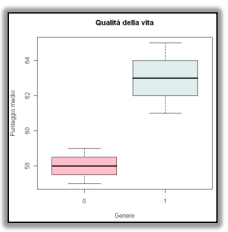
MODELLO TEORICO 2

```
> glm3<-(glm(qdv ~ age + sex, family=gaussian)) #Calcola il modello 3 (H1)
```

```
> anova(glm0, glm3, test="F") #Confronto tra i modelli
Analysis of Deviance Table

Model 1: qdv ~ 1
Model 2: qdv ~ age + sex
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance     F  Pr(>F)
1         7         60
2         5         10  2       50 12.5 0.01134 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

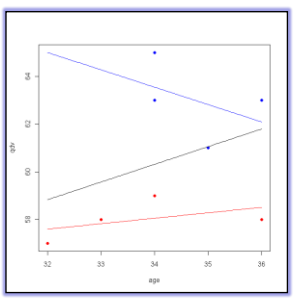


```
> summary(glm3) #Riassume il modello 3

Call:
glm(formula = qdv ~ age + sex, family = gaussian)

Deviance Residuals:
         1          2          3          4          5          6
 1.421e-14  -2.000e+00   1.000e+00   2.000e+00   7.105e-15  -1.000e+00
         7          8
 0.000e+00   0.000e+00

Coefficients:
             Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.800e+01  1.409e+01      4.116  0.00921 **
age         -2.674e-15  4.170e-01 -6.41e-15  1.00000
sex          5.000e+00  1.083e+00      4.615  0.00576 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 2)

    Null deviance: 60  on 7  degrees of freedom
Residual deviance: 10  on 5  degrees of freedom
AIC: 32.488

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

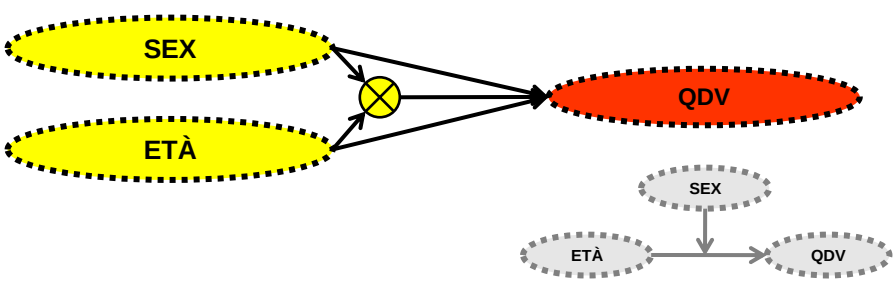


ESEMPIO

Nel modello 1 e nel modello 2 la relazione tra età e qualità della vita è stata **forzata** essere uguale per gli **uomini** e per le **donne**. Tuttavia è possibile (vedi Figura) che ci sia una differenza significativa. Un modo per verificare questa ipotesi è inserire l'**interazione tra le variabili**. Vale a dire una nuova variabile che è il prodotto tra le due (**sesso×età**)



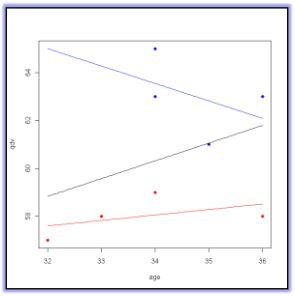
MODELLO TEORICO 3



MODELLO TEORICO 3

```
> glm4<-(glm(qdv ~ z.age*sex, family=gaussian)) #Calcolo il modello 4 (H1)
```

```
> anova(glm0, glm4, test="F") #Faccio il confronto tra i modelli
Analysis of Deviance Table

Model 1: qdv ~ 1
Model 2: qdv ~ z.age * sex
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance      F Pr(>F)
1         7     60.000
2         4      8.088  3   51.912 8.5575 0.0325 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



```
> summary(glm4) #Riassumo il modello trovato

Call:
glm(formula = qdv ~ z.age * sex, family = gaussian)

Deviance Residuals:
      1       2       3       4       5       6       7       8
-0.5143  -1.8182   0.9429   1.4545   0.9091  -0.6000  -0.5455   0.1714

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  58.1143     0.7505  77.431 1.67e-07 ***
z.age         0.3174     0.6676   0.475  0.65925
sex           5.2494     1.1192   4.690  0.00938 **
z.age:sex    -1.3274     1.3652  -0.972  0.38595
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 2.022078)

    Null deviance: 60.0000  on 7  degrees of freedom
Residual deviance:  8.0883  on 4  degrees of freedom
AIC: 32.791

Number of Fisher Scoring iterations: 2
```

TECNICHE DI REGRESSIONE MULTIPLA

NELLA PRATICA LA REGRESSIONE MULTIPLA PUÒ ESSERE USATA UTILIZZANDO **DIVERSE STRATEGIE**.

TALI STRATEGIE DIFFERISCONO PREVALENTEMENTE NEL CRITERIO CHE DEFINISCE **L'ORDINE DI "ENTRATA" DELLE VI NELL'EQUAZIONE** DI REGRESSIONE.

L'ORDINE DI INTRODUZIONE, INFATTI, DETERMINA LA PARTE DI VARIANZA DELLA VD UTILIZZATA PER LA VERIFICA DELLE IPOTESI SU CIASCUNA VI.

LA **PRIMA** VARIABILE HA A DISPOSIZIONE TUTTA LA VARIANZA DELLA **VD** (**100%**), LA SECONDA AVRÀ A DISPOSIZIONE SOLO LA **VARIANZA RESIDUA**, E COSÌ PER TUTTE LE SUCCESSIVE VARIABILI.

TRE SONO LE STRATEGIE MAGGIORMENTE IMPIEGATE NELLA PRATICA:

• **LA REGRESSIONE STANDARD** **(ESPLICATIVA).** CONSENTE DI VERIFICARE L'ENTITÀ DELLA **RELAZIONE COMPLESSIVA** TRA **VI** E **VD**, E IL CONTRIBUTO SPECIFICO DI CIASCUNA **VI** CONTROLLATO PER TUTTE LE VI IN EQUAZIONE.

• **LA REGRESSIONE GERARCHICA** **(COMPARATIVA).** CONSENTE DI VALUTARE QUAL È IL **CONTRIBUTO AGGIUNTIVO** DELLA/E VARIABILE/I X_2 INSERITA/E DOPO X_1.

• **LA REGRESSIONE STATISTICA** **(PREDITTIVA).** CONSENTE DI IDENTIFICARE LA **MIGLIORE COMBINAZIONE PREDITTIVA** TRA LE **VI** CONSIDERATE.

REGRESSIONE MULTIPLA STANDARD

Tutte le **VI** vengono inserite **contemporaneamente**. ognuna, infatti, è trattata **come se fosse l'ultima**.

ad ogni **VI** corrisponde solo quella parte di variabilità che condivide "**UNICAMENTE**" con la **VD**.

Viene quindi interpretato il modello complessivo e il contributo di ciascun predittore sulla VD. questa seconda interpretazione si avvale dell'utilizzo dei **coefficienti di regressione parziale**.

L'ampiezza dell'R^2 è determinata dalla **porzione unica** di ciascun predittore e dalla **porzione comune** a tutte le lariabili che aumenta all'aumentare della **collinearità** tra le **VI**.

REGRESSIONE MULTIPLA GERARCHICA

L'**ordine** di inserimento delle variabili viene **specificato dal ricercatore**. Ogni **VI** è valutata per **quanto aggiunge** nella spiegazione della **VD** rispetto a quanto è stato spiegato dalle variabili inserite precedentemente.

L'**ordine** viene stabilito dal ricercatore **in funzione delle considerazioni teoriche** o **logiche**.

Il cambiamento viene valutato mediante le variazioni osservate nei termini dell'R^2 la cui significatività e poi valutata mediante il valore **F**.

REGRESSIONE MULTIPLA GERARCHICA

Nella **regressione gerarchica**, i modelli sono confrontabili quando sono gerarchicamente organizzabili o **nidificati** o ***nested***.

Un **modello A (M_A)** si dice *nested* in un **modello B (M_B)** se il **modello A** è composto da alcuni dei termini contenuti nel **modello B**, e non ve ne sono di diversi, mentre nel **modello B** vi sono anche **termini aggiuntivi**.

$$M_A = a + b$$

$$M_B = a + b + c$$

$$M_A - M_B = \Delta M_B$$

PER **PORRE A CONFRONTO DIFFERENTI MODELLI** È POSSIBILE UTILIZZARE LA STATISTICA **F** PER VALUTARE SE IL **CONTRIBUTO DIFFERENZIALE** È **SIGNIFICATIVO**.

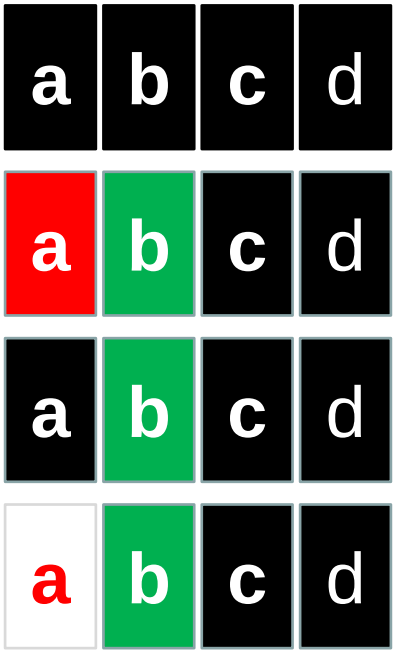
$$E(Y_j) = \alpha + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + \beta_k X_{kj} + \beta_{k+1} X_{k+1\,j} + \\ + \beta_{k+2} X_{k+2\,j} + \beta_{k+r} X_{k+rj} + \varepsilon_j$$

IN QUESTO CASO SI È INTERESSATI A VERIFICARE L'EFFETTO CHE L'AGGIUNTA DEGLI ***r*** PREDITTORI HA NELLA FUNZIONALITÀ DEL MODELLO:

$$F = \frac{\dfrac{R^2 - R_m^2}{r}}{\dfrac{(1 - R^2)}{(n - k - r - 1)}}$$

$$H_0 \Rightarrow \beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \beta_{k+r} = 0$$

DOVE $\mathbf{R^2_m}$ CORRISPONDE AL COEFFICIENTE $\mathbf{R^2}$ OTTENUTO **SENZA GLI *r* PREDITTORI**.



$$Dev_{Totale} = a + b + c + d$$

$$R^2_{Totale} = \frac{a+b}{a+b+c+d}$$

$$R^2_{Semi-Parziale} = \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$R^2_{Parziale} = \frac{b}{b+c+d}$$

POSSIBILI R^2 E RELATIVE INTERPRETAZIONE

R^2 *totale* del modello ➔ si ottiene facendo il rapporto tra **$DEV_{spiegata}$** e **DEV_{totale}** della VD. *Corrisponde alla capacità esplicativa* ***totale*** *di tutte le variabili nel modello* (indistintamente).

R^2 *semi-parziale* (ΔR^2) ➔ si ottiene facendo il rapporto tra **$DEV_{spiegata}$** da una singola VI e **DEV_{totale} della VD**. *Corrisponde alla capacità esplicativa* ***unica*** *di una singola VI rispetto alla variabilità totale della VD. Ovvero la parte della varianza spiegata attribuibile unicamente dalla variabile considerata.*

R^2 *parziale* ➔ si ottiene facendo il rapporto tra **$DEV_{spiegata}$** dalla singola variabile e (**DEV_{totale}** – **$DEV_{spiegata\_dalle\_altre\_VI}$**). *Corrisponde alla capacità esplicativa* ***unica*** *di una singola VI rispetto alla variabilità della VD* ***non spiegata dalle altre*** *VI. Ovvero la proporzione della varianza residua del modello precedente spiegata dalla VI considerata.*

REGRESSIONE MULTIPLA STATISTICA

L'**ordine** di inserimento delle variabili viene determinato **algebricamente**. generalmente il termine di riferimento è il **coefficiene di correlazione parziale**.

Esistono **tre principali tecniche**: ***forward*** (in cui si aggiungono le VI significativamente associate alla VD); ***backward*** (in cui si eliminano le VI non associate significativamente alla VD); ***stepwise*** (in cui si aggiungono le vi associate significativamente alla VD, ma se ai passaggi successivi perdono la forza associativa vengono eliminate).

MEDIANTE L'R^2 SI VALUTA IL **MODELLO FINALE**, SI VALUTA L'**ORDINE DI INGRESSO** DELLE VARIABILI E IL **CONTRIBUTO DI CIASCUNA**.

LE ASSUNZIONI NELLA REGRESSIONE MULTIPLA

INDIPENDENTEMENTE DALLA TECNICA SCELTA, PER UNA **CORRETTA APPLICAZIONE** DEL MODELLO DELLA REGRESSIONE, QUINDI, PER UNA **CORRETTA STIMA DEI PARAMETRI** DELLA POPOLAZIONE E PER LA **VERIFICA DELLE IPOTESI** È **NECESSARIO** CHE LE ASSUNZIONI PREVISTE DAL MODELLO SIANO VERIFICATE.

IN CASO DI VIOLAZIONE, IL RISCHIO IN CUI SI PUÒ INCORRERE DIPENDE DAL TIPO DI VIOLAZIONE OSSERVATA.

..ASSUNZIONI…

• **TUTTE LE VARIABILI** DEVONO ESSERE MISURATE SU SCALA ALMENO AD **INTERVALLI** E **SENZA ERRORE**

• LA VARIABILE DIPENDENTE È **FUNZIONE LINEARE** DELLA COMPONENTE DETERMINISTICA ($X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + \ldots + X_{kj}$)

• PER OGNI SET DELLE ***k*** VARIABILI INDIPENDENTI ($X_{1j}; X_{2j}; X_{3j}; \ldots; X_{kj}$), $E(\varepsilon_j) = 0$

• PER OGNI SET DELLE ***k*** VARIABILI INDIPENDENTI, $VAR\ E(\varepsilon_j) = \sigma^2$ (COSTANTE)

..ASSUNZIONI…

•PER OGNI COPPIA DELLE ***k*** VARIABILI INDIPENDENTI, **COV (ε_j, ε_h) = 0** (GLI ERRORI NON DEVONO ESSERE COMUNI)

• PER OGNI VARIABILE INDIPENDENTE $\mathbf{X}_i$, **COV (X_i, ε) = 0**

• NON CI DEVE ESSERE UNA **PERFETTA COLLINEARITÀ** TRA LE **VI** NEL MODELLO

• PER OGNI SET DELLE ***k*** VARIABILI INDIPENDENTI ε_j DEVE ESSERE NORMALMENTE DISTRIBUITO

Se i primi **6 assunti** sono rispettati (in base al teorema di **Gauss-Markov**) è possibile affermare che **le formule di stima derivate dal principio dei minimi quadrati (LS) sono efficienti** e senza ***bias***; e vengono dette **BLUE** (**B**EST **L**INEAR **U**NBIASED **E**STIMATOR). Il teorema, tuttavia, vale solo se gli assunti sono rispettati.

In genere, il **metodo più utile** per verificare l'adeguatezza del modello è l'**analisi dei residui** dei valori stimati dalla regressione per ogni valore osservato:

$$e = Y_j - \hat{Y}_j$$

L'ASSUNTO DELLA MULTICOLLINEARITÀ

UNA PRIMA DISTINZIONE DEVE ESSERE FATTA TRA LA **PERFETTA MULTICOLLINEARITÀ** E LE **FORME MENO ESTREME** DI MULTICOLLINEARITÀ.

LA **PERFETTA COLLINEARITÀ** ESISTE QUANDO UNA O PIÙ **VI** È PERFETTAMENTE CORRELATA (*r* = 1) AD UNA O PIÙ DELLE ALTRE **VI** NELL'EQUAZIONE.

$$X_1 = 2.3X_2 + 3 \quad \text{oppure} \quad X_2 = 2X_3$$

FORTUNATAMENTE NELLA PRATICA PSICOLOGICA NON CAPITANO QUASI MAI CASI DI QUESTO TIPO (**DOVE LA STIMA DEI PARAMETRI RISULTA NON POSSIBILE**).

MOLTO PIÙ SPESSO ABBIAMO A CHE FARE CON IL CASO IN CUI SI ASSISTE A **FORME MENO ESTREME DI COLLINEARITÀ**.

NEGLI **ESPERIMENTI**, AD ESEMPIO, QUESTO PROBLEMA VIENE PERFETTAMENTE RISOLTO DAL MOMENTO CHE LE VARIABILI SONO MANIPOLATE DALLO SPERIMENTATORE IN MODO DA RENDERLE INDIPENDENTI.

NELLA PRATICA È BENE CONSIDERARE LA **COLLINEARITÀ** COME UN **GRADIENTE**.

La presenza della **multicollinearità** non altera la validità dell'**ols**, ma **influisce sull'interpretazione della significatività** **delle stime** dei **coefficienti parziali**.

Infatti, quando due o più variabili indipendenti sono altamente correlate **è IMPOSSIBILE conoscere il contributo di ciascuna** delle due variabili sulla **variabile dipendente**.

Da un punto di vista statistico l'influenza della **collinearità** si osserva nella **stima** del coefficiente d'**errore** (***s***) che inevitabilmente **aumenta** e nei conseguenti **test di significatività** (***t***) dove si osserva una **riduzione** dei valori.

Gli effetti della multicollinearità sono **IRRILEVANTI** se il nostro modello si pone come obiettivo la predizione della vd (**MODELLO PREDITTIVO**); diventano molto **più SERI** se l'obiettivo della regressione è quello di definire la **rilevanza** dei singoli predittori (**MODELLO INTERPRETATIVO**).

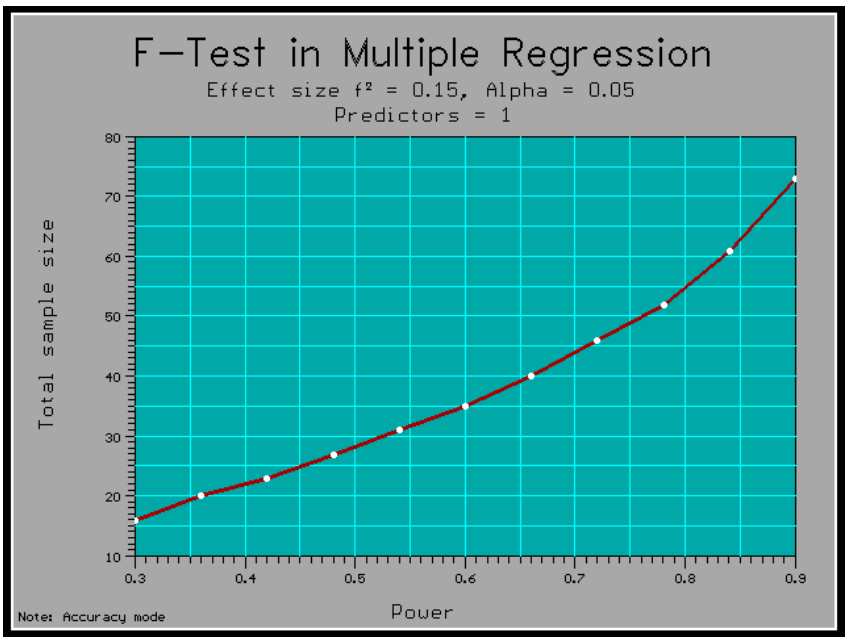
Tranne nel caso della perfetta multicollinearità, nella pratica non esistono **test** che consentono di **definire** se questo problema esiste o meno.

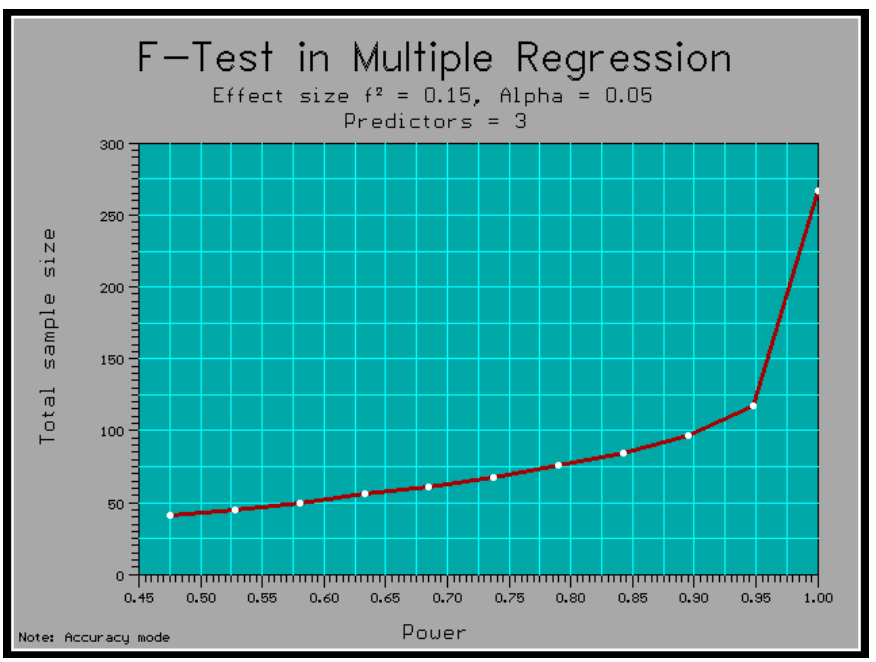
FORTUNATAMENTE, PERÒ, ESISTONO DEI **SEGNALI** CHE POSSONO PORTARCI SOSPETTARNE LA PRESENZA.

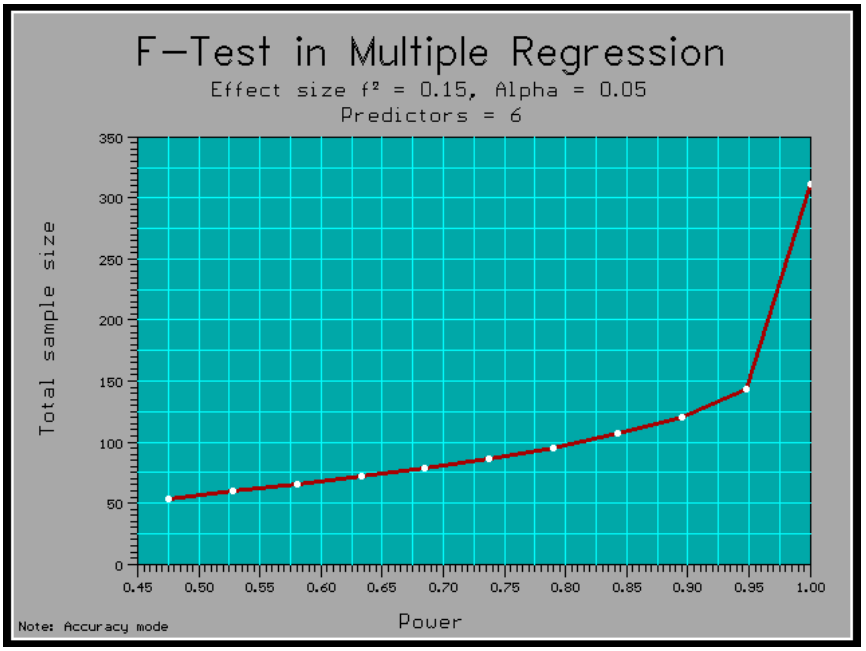
ALCUNI **SEGNALI** POSSONO ESSERE RICONOSCIUTI QUANDO:

- **IL MODELLO** MOSTRA UN BUON FIT CON I DATI E TUTTAVIA SI OSSERVA CHE **TUTTI** I COEFFICIENTI PARZIALI SONO **NON SIGNIFICATIVI**;
- LE **STIME** DEI COEFFICIENTI PARZIALI **NON SONO STABILI** NEI DIVERSI CAMPIONI O NELLO STESSO CAMPIONE A SEGUITO DI LEGGERE VARIAZIONI DEL MODELLO.

SE I SI RILEVANO TALI SEGNALI È POSSIBILE IMPIEGARE ALCUNI **TEST** PER PROCEDERE AD UNA PIÙ DIRETTA VERIFICA.


F-Test in Multiple Regression
Effect size f² = 0.15, Alpha = 0.05
Predictors = 1
Total sample size
80
70
60
50
40
30
20
10
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Power
Note: Accuracy mode


F-Test in Multiple Regression
Effect size f² = 0.15, Alpha = 0.05
Predictors = 3
Total sample size
300
250
200
150
100
50
0
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
Power
Note: Accuracy mode


F-Test in Multiple Regression
Effect size f² = 0.15, Alpha = 0.05
Predictors = 6
Total sample size
350
300
250
200
150
100
50
0
0.45
0.50
0.55
0.60
0.65
0.70
0.75
0.80
0.85
0.90
0.95
1.00
Power
Note: Accuracy mode